EFFEKTIVE DREIKÖRPERWECHSELWIRKUNG IN ZUSAMMENGESETZTEN SYSTEMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

HELMUT SEICHTER

aus Gilching

1979

EFFEKTIVE DREIKÖRPERWECHSELWIRKUNG IN ZUSAMMENGESETZTEN SYSTEMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

HELMUT SEICHTER

aus Gilching

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Mündliche Prüfung: 12. Februar 1979

Dekan: Prof. Dr. H. Mauder

1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. W. Schmid

2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Wildermuth

Gesamtherstellung: **aku** - Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

Inhaltsverzeichnis

I.	Einleitung	1
II.	Die N-Cluster-Resonating-Group-Gleichungen	3
III.	Die Drei-Cluster-Resonating-Group-Gleichung	5
1.	Allgemeines	5
2.	Direktterm	10
3.	Zwei-Cluster-Austauschterme	13
4.	Drei-Cluster-Austauschterme	19
5.	Zusammenfassung	23
IV.	Die effektiven Potentiale im Fall $He^4 + n + p$	29
1.	Ansatz	29
2.	Zwei-Körper-Wechselwirkungen	32
3.	Drei-Körper-Wechselwirkungen	33
3.1.	Zwei-Cluster-Austausch	33
3.2.	Drei-Cluster-Austausch	35
V.	Separable Näherung der effektiven Wechselwirkung	42
1.	Wahl des Formfaktors	42
2.	Eigenfunktionen der Normterme	44
3.	Matrixelemente	48

VI. Zusammenfassung und Diskussion 54

Anhang 57

Literatur 59

I. Einleitung

Dreikörpersysteme und dabei insbesondere der Aufbruch in drei Fragmente sind im Rahmen von "konventionellen" Methoden zur Behandlung von Kernreaktionen nur schwer oder gar nicht zufriedenstellend zu behandeln /1/. Daher wurde mit Erfolg versucht, auf solche Systeme Integralgleichungsmethoden anzuwenden, wie sie für das Dreiteilchenproblem entwickelt wurden /2/. Dazu wurden effektive Potentiale zwischen jeweils zwei der drei Cluster an die Streudaten in diesem Subsystem angepaßt.

Anstelle dieses rein phänomenologischen Zugangs kann man die effektive Subsystemwechselwirkung auch mit der Resonating-Group-(RG)-Theorie berechnen, wobei vor allem das Pauli-Prinzip voll berücksichtigt wird /3/. Stellt man die RG-Gleichungen aber nicht nur für die Zwei-Cluster-Subsysteme, sondern auch für das Drei-Cluster-Gesamtsystem auf, so erhält man auch Terme, die einer effektiven Dreikörperkraft entsprechen /4/.

Die Existenz solcher Terme soll im folgenden Beispiel plausibel gemacht werden:
Im System $He^3 + n + n$ wird die Wechselwirkung des ersten Neutrons mit He^3 stark durch die Anwesenheit des zweiten beeinflußt, da dieses den letzten freien Platz in der 1s-Schale im Helium besetzen kann und dadurch die Annäherung des ersten Neutrons stark behindert.

Die Berechnung der effektiven Potentiale mittels der RG-Theorie bietet also gegenüber einem rein phänomenologischen Ansatz zwei Vorteile: Da man von der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und physikalisch sinvollen Ansätzen für die Bindungsfunktionen ausgeht, ist die RG-Streufunktion im Innenraum und damit das effektive Potential bezüglich seiner off-shell-Eigenschaften zumindest eine gute Näherung. Zum anderen kann ein Drei-Körper-Potential natürlich nicht aus

Zwei-Körper-Streudaten gewonnen werden und fehlt daher bei einem phänomenologischen Potential völlig. Diese im wesentlichen durch das Pauli-Prinzip bedingte effektive Dreikörperwechselwirkung zwischen drei Clustern ist das Thema dieser Arbeit.

II. Die N-Cluster-Resonating-Group-Gleichungen

Ausgangspunkt dieser Betrachtungen ist die mikroskopische A-Teilchen-Schrödinger-Gleichung

$$(H - E)|\psi\rangle = 0 \,. \qquad \text{(II,1)}$$

Der Hamiltonoperator H enthält die Operatoren der kinetischen Energien der A Teilchen und der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen.

Für eine Lösung $|\psi\rangle$ dieser Gleichung gilt dann, auch bei beliebigem $\delta\psi$

$$\langle\delta\psi|(H - E)|\psi\rangle = 0 \,. \qquad \text{(II,2)}$$

Dies kann formal als Projektions- oder als Variationsgleichung gelesen werden. Diese wird nun auch dann noch gefordert, wenn $|\psi\rangle$ keinem vollständigem Funktionenraum entnommen wird und dann im allgemeinen auch keine exakte Lösung mehr sein kann.

Ein solcher Funktionenraum für $\psi(r_1,\ldots,r_A)$ wird aufgespannt durch den N-Cluster-Ansatz /5,6/

$$\begin{aligned}\psi = \hat{A}\{ & \sum_i \phi_i(1) \ldots \phi_i(N)\ \chi_i(R_{i,1},\ldots,R_{i,N-1}) \\ & + \sum_j{}' \phi_j(1) \ldots \phi_j(N-1)\ \chi_j(R_{j,1},\ldots,R_{j,N-2}) \\ & \vdots \\ & + \sum_k{}' \phi_k(1)\ \phi_k(2)\ \phi_k(3)\ \chi_k(R_{k,1},R_{k,2}) \\ & + \sum_\ell{}' \phi_\ell(1)\ \phi_\ell(2)\ \chi_\ell(R_\ell) \\ & + \sum_m{}' \phi_m\ a_m \} \,. \qquad \text{(II,3)}\end{aligned}$$

$\hat{A}$ ist der Antisymmetrisierungsoperator, die $\phi_p(q)$ sind Bindungsfunktionen oder (bis auf die erste Zeile) quadratintegrable Korrekturen zum q - ten Cluster. Der Index $p = i, j, \ldots, k,\ell$ numeriert die verschiedenen Aufteilungen der A Nukleonen auf je nach Zeile zwei bis N Cluster. Die Funktionen χ in den Relativkoordinaten R zwischen den Clustern sind frei variierbar. Die letzte Zeile enthält nur noch quadratintegrable Korrekturen. Der Apostroph an den Summen soll symbolisieren, daß solche Clusterpartitionen weggelassen werden, die zu linearen Abhängigkeiten führen würden.

Wäre $N = A$, so würde die erste Zeile bereits den ganzen Raum aufspannen und die restlichen fielen dann weg. Bei einer Entwicklung bis zur N-Cluster-Stufe ergäbe sich die Reduktion des A-Teilchen-Problems auf ein effektives N-Körper-Problem mit Potentialen bis zu einer N-Körper-Wechselwirkung. Wie weit die Entwicklung mindestens getrieben werden muß und welche Clusteraufteilungen man auf jeden Fall mitnehmen muß, wird durch physikalisch plausible Überlegungen bestimmt.

Um Zwei-Körper-Streudaten zufriedenstellend wiederzugeben, genügen in der Regel wenige oder sogar nur eine Aufteilung in zwei Cluster /6/.

Im folgenden wird untersucht, was sich ergibt, wenn auch Aufteilungen in drei Cluster vorkommen, insbesondere von welcher Art die dann auftretenden Dreikörperwechselwirkungen sind.

III. Die Drei-Cluster-Resonating-Group-Gleichung

III.1. Allgemeines

Um einen ersten Überblick zu bekommen, werden im folgenden nur Fälle betrachtet, in denen das zu untersuchende System schon gut durch nur eine Aufteilung in drei Cluster A, B und C ohne Anregungen und Korrekturen bei kurzen Relativabständen beschrieben wird.

Der sogenannte no-distortion-Ansatz für die Wellenfunktion lautet dann /6/

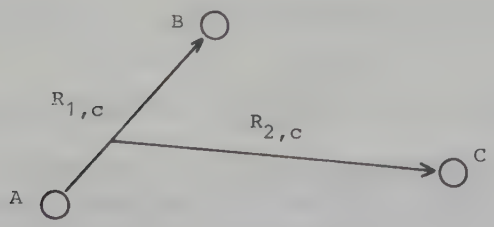
$$\psi = \hat{A} \{ \phi_a(r_a) \, \phi_b(r_b) \, \phi_c(r_c) \, \chi(R_1,R_2) \} \, . \qquad \text{(III,1)}$$

Die $\phi_{a,b,c}$ stehen für die Bindungsfunktionen und die Quantenzahlen der Cluster A, B oder C.

Im Trivialfall, in dem ein Cluster nur ein Teilchen enthält, symbolisiert ϕ nur noch die Spin- und Isospinquantenzahlen. χ ist die unbekannte Relativwellenfunktion. Hier und im weiteren stehen die kleinen r für die "inneren" Koordinaten der Cluster und die großen R für die "äußeren" Koordinaten zwischen den Clusterschwerpunkten s_a, s_b und s_c, am zweckmäßigsten etwa Jakobikoordinaten

$$R_{1,c} = s_b - s_a \qquad \text{(III,2a)}$$

$$R_{2,c} = s_c - \frac{m_a s_a + m_b s_b}{m_a + m_b} \, , \qquad \text{(III,2b)}$$



wobei $m_{a,b,c}$ die Massen der Cluster sind. Diese Koordinaten zeichnen ein Cluster (hier C) oder anders gesehen ein Clusterpaar (hier A + B) aus, was durch den Index angedeutet wird. Welcher von den drei möglichen Sätzen von Jakobikoordinaten gemeint ist, wird im weiteren nur dann gekennzeichnet, wenn dies von Belang ist.

Die Aufteilung in zwei äußere oder Interclusterkoordinaten R und A - 3 innere oder Intraclusterkoordinaten r kann stets so getroffen werden, daß sie orthogonale Teilräume aufspannen. Skalarprodukte faktorisieren dann in solche in Teilräumen; dann wird zum Beispiel

$$\langle \phi_a \phi_b \phi_c \chi \mid \phi_a \phi_b \phi_c \chi \rangle$$

$$= \langle \phi_a | \phi_a \rangle \langle \phi_b | \phi_b \rangle \langle \phi_c | \phi_c \rangle \langle \chi | \chi \rangle \quad . \qquad \text{(III,3)}$$

Zusammen mit der Schwerpunktskoordinate sind dies wieder A unabhängige Vektorkoordinaten. Solange klar ist, was gemeint ist, wird hier und im folgenden darauf verzichtet, Vektoren speziell zu kennzeichnen.

In der RG-Gleichung

$$\langle \delta\psi | (H - E) | \psi \rangle = 0 \qquad \text{(III,4)}$$

schreibt man

$$\delta\psi = \hat{A} \{ \phi_a \phi_b \phi_c \, \delta(R_1 - R_1') \, \delta(R_2 - R_2') \} \qquad \text{(III,5)}$$

mit den sogenannten Parameterkoordinaten R_1' und R_2' /6/ und erhält dann

$$\int \hat{A} \{ \phi_a(r_a) \phi_b(r_b) \phi_c(r_c) \delta(R_1 - R_1') \delta(R_2 - R_2') \} \qquad \text{(III,6a)}$$

$$\times (H-E) \cdot \hat{A} \{ \phi_a(r_a) \phi_b(r_b) \phi_c(r_c) \chi(R_1, R_2) \} \, dr \, dR = 0 \; .$$

Das Integralzeichen zusammen mit dr dR steht sowohl für Integration über alle Raumkoordinaten als auch für Summation über alle diskreten Quantenzahlen.

Häufig schreibt man auch noch

$$\psi(r,R_1,R_2) = \int \phi_a\phi_b\phi_c \cdot \chi(R_1'',R_2'') \cdot \delta(R_2-R_2'') \cdot \delta(R_1-R_1'')\ dR_1''\ dR_2'' \ . \qquad \text{(III,7)}$$

Dann kann man (III,6a) auch formal schreiben als

$$\int \langle \hat{A}\{\phi_a\phi_b\phi_c R'\} | (H-E) | \hat{A}\{\phi_a\phi_b\phi_c R''\}\rangle \langle R'' | \chi\rangle\ dR'' \ , \qquad \text{(III,6b)}$$

wobei R' und R'' die Ortszustände der Relativkoordinaten sind. Es gilt also u. a.

$$\langle R' | R''\rangle = \delta(R_1'-R_1'') \cdot \delta(R_2'-R_2'') \qquad \text{(III,8)}$$

und

$$\langle R'' | \chi\rangle = \chi(R_1'',R_2'') \ . \qquad \text{(III,9)}$$

Allgemeiner könnten R' und R'' auch die restlichen Freiheitsgrade beschreiben, die noch nicht durch innere Funktionen festgelegt sind. Das Integral bedeutet dann Integration und möglicherweise Summation über diese Freiheitsgrade.

Wegen der Projektoreigenschaft

$$\hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{A} \qquad \text{(III,10)}$$

und der Symmetrie von H kann einer der beiden Antisymmetrisierer in den Gleichungen (III,6) weggelassen werden. Der auf $\chi(R'')$ wirkende Operator lautet dann

$$\langle \phi_a\phi_b\phi_c R' | (H - E) \cdot \hat{A} | \phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle \ . \qquad \text{(III,11)}$$

In den Ansätzen (III,1) und (III,5) wurde benutzt, daß die Schwerpunktsbewegung ψ_s abgespaltet werden kann und daß wegen der Symmetrie der Schwerpunktskoordinaten gilt

$$\hat{A}(\psi_s \cdot \psi) = \psi_s \cdot \hat{A}\psi \ . \qquad \text{(III,12)}$$

Die Antisymmetrisierung braucht also nur in dem Teil ψ der Wellenfunktion durchgeführt werden, der in Relativkoordinaten steht.

Mit $\psi' = \psi_s \cdot \psi$ gilt also

$$\langle \hat{A}\delta\psi' | H-E | \hat{A}\psi' \rangle = \langle \psi_s | \psi_s \rangle \langle \hat{A}\delta\psi | H-E | \hat{A}\psi \rangle \ . \qquad \text{(III,13)}$$

Um die im weiteren Verlauf nach Integration über innere Koordinaten entstehende Terme möglichst kurz schreiben zu können, werden die folgenden Vereinbarungen getroffen:

Die Clusterfunktionen $\phi_{a,b,c}$ seien bereits antisymmetrisch, so daß zum Antisymmetrisieren die Nebenklasse der Permutationen genügt, die Teilchenindizes zwischen den Clustern vertauschen. Es gilt dann, wenn $\hat{A}''$ die Cluster intern und $\hat{A}'$ zwischen den Clustern antisymmetrisiert bei entsprechender Normierung

$$\hat{A} = \hat{A}' \cdot \hat{A}'' \ . \qquad \text{(III,14)}$$

Die Antisymmetrisierer der einzelnen Cluster seien jeweils $\hat{A}_a$, $\hat{A}_b$ und $\hat{A}_c$. Die Normierungen seien so vorgenommen, daß gilt

$$\hat{A}_a | \phi_a \rangle = | \phi_a \rangle \qquad \text{(III,15a)}$$

und

$$\langle \phi_a | \hat{A}_a | \phi_a \rangle = \langle \phi_a | \phi_a \rangle = 1 \qquad \text{(III,15b)}$$

und entsprechendes für die Indizes b und c.

Damit gilt dann auch

$$\langle \phi_a \phi_b \phi_c | \hat{A}'' | \phi_a \phi_b \phi_c \rangle$$

$$= \langle \phi_a | \hat{A}_a | \phi_a \rangle \langle \phi_b | \hat{A}_b | \phi_b \rangle \langle \phi_c | \hat{A}_c | \phi_c \rangle = 1 \ . \qquad \text{(III,15c)}$$

P_{ab}, P_{ac} und P_{bc} seien Vertauschungen nur zwischen den Clustern A und B, A und C bzw. B und C ; P_{abc} sei eine Vertauschung zwischen allen drei Clustern.

Der Hamiltonoperator wird aufgespaltet in

$$H = H_a + H_b + H_c + T_{1,i} + T_{2,i} + V_{abc} \quad , \qquad \text{(III,16)}$$

wobei H_a, H_b und H_c die innere Bewegung in den Clustern enthalten. $T_{1,i}$ und $T_{2,i}$ sind die Operatoren der relativen kinetischen Energie in Jakobikoordinaten $R_{1,i}$ und $R_{2,i}$, also z. B. $(1/2\mu_i)\cdot\nabla^2_{R_{1,i}}$, und V_{abc} ist die Summe aller Wechselwirkungen zwischen Teilchen, die sich in verschiedenen Clustern befinden.

V_{abc} kann noch weiter zerlegt werden in

$$V_{abc} = V_{ab,c} + V_{a,b} = V_{ac,b} + V_{a,c}$$

$$= V_{bc,a} + V_{b,c} \cdot \qquad \text{(III,17a)}$$

Hier ist z. B. $V_{a,b}$ die Wechselwirkung zwischen allen Teilchen, von denen sich eines in Cluster A und das andere in Cluster B befindet, $V_{ab,c}$ ist die Wechselwirkung zwischen Teilchen in A oder B und solchen in C und kann auch geschrieben werden als

$$V_{ab,c} = V_{a,c} + V_{b,c} \quad . \qquad \text{(III,17b)}$$

Der Einfachheit halber wurde angenommen, daß die zu Grunde liegende Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung eine reine Zwei-Körper-Wechselwirkung ist. Bezieht man auch Drei-Körper-Kräfte zwischen Nukleonen mit ein, so haben natürlich alle daraus abgeleiteten effektiven Potentiale diese Drei-Körper-Eigenschaft.

III.2. Direktterm

Verwendet man in (III,11) die Operatorbeziehung (III,14) und betrachtet von den Summanden im Intercluster-Antisymmetrisierer $\hat{A}'$ nur die Identität, so ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\langle\phi_a\phi_b\phi_c R'|(H-E)\cdot\hat{A}''\cdot 1|\phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle \\
&= \langle\phi_a\phi_b\phi_c|(H_a+H_b+H_c)\cdot\hat{A}''|\phi_a\phi_b\phi_c\rangle\ \langle R'|1|R''\rangle \\
&\quad + \langle\phi_a\phi_b\phi_c|\hat{A}''|\phi_a\phi_b\phi_c\rangle\ \langle R'|T_1+T_2|R''\rangle \\
&\quad + \langle\phi_a\phi_b\phi_c R'|V_{abc}\cdot\hat{A}''|\phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle \\
&\quad - \langle\phi_a\phi_b\phi_c R'|\hat{A}''\cdot E|\phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle \qquad . \qquad \text{(III,18)}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde von der Aufspaltung (III,16) von H Gebrauch gemacht.

Wegen der Voraussetzungen (III,15) und weil die ϕ_a,ϕ_b,ϕ_c antisymmetrische Bindungsfunktionen zu den Energien E_a, E_b, E_c sein sollen, gilt

$$\begin{aligned}
&\langle\phi_a\phi_b\phi_c|(H_a+H_b+H_c)\hat{A}''|\phi_a\phi_b\phi_c\rangle \\
&= \langle\phi_a|H_a|\phi_a\rangle + \langle\phi_b|H_b|\phi_b\rangle + \langle\phi_c|H_c|\phi_c\rangle \\
&= E_a + E_b + E_c \qquad . \qquad \text{(III,19)}
\end{aligned}$$

Falls, wie häufig in der Praxis, die ϕ nur Näherungen für die exakten Bindungslösungen des Intraclusterproblems sind, dann sind die E_a, E_b, E_c als Energieerwartungswerte Näherungen für die Bindungsenergien.

Zusammengefaßt mit dem letzten Term in (III,18) erhält man dann einen Ausdruck

$$- (E-E_a-E_b-E_c) \; < R' | R'' > \; = \; - \; E_{rel} \; < R' | R'' > \; . \qquad \text{(III,20)}$$

E_{rel} ist dabei die Energie, die für die Relativbewegung der drei Cluster zur Verfügung steht.

Der vorletzte Term in (III,18) kann wegen der Aufspaltungen (III,17) zu

$$\begin{aligned} & <\phi_a\phi_b R' | V_{a,b} | \phi_a\phi_b R''> \; <\phi_c|\phi_c> \\ & + <\phi_a\phi_c R' | V_{a,c} | \phi_a\phi_c R''> \; <\phi_b|\phi_b> \\ & + <\phi_b\phi_c R' | V_{b,c} | \phi_b\phi_c R''> \; <\phi_a|\phi_a> \end{aligned} \qquad \text{(III,21)}$$

umgeschrieben werden.

Der erste Term von (III,21) aber zum Beispiel führt in den entsprechenden Koordinaten wegen $<\phi_c|\phi_c> = 1$ auf

$$\begin{aligned} & \int \delta(R'_{1,c}-R_{1,c}) \, \delta(R'_{2,c}-R_{2,c}) \, \phi_a(r_a) \, \phi_b(r_b) \, V_{a,b}(r_a, r_b, R_{1,c}) \\ & \times \phi_a(r_a) \, \phi_b(r_b) \, \delta(R''_{1,c}-R_{1,c}) \, \delta(R''_{2,c}-R_{2,c}) \; dr \; dR \\ & = V^D_{a,b}(R'_{1,c}) \cdot \delta(R'_{1,c}-R''_{1,c}) \cdot \delta(R'_{2,c}-R''_{2,c}) \; . \end{aligned} \qquad \text{(III,22)}$$

Hierbei ist $V^D_{a,b}$ gerade der Term, der in der RG-Gleichung für das Zwei-Cluster-Subsystem A+B als Direktpotential oder folding potential auftreten würde.

Das Direktpotential im Drei-Cluster-Fall ist also die Summe der Direktpotentiale der Subsysteme:

$$V^D_3 = V^D_{a,b}(R'_{1,c}) + V^D_{a,c}(R'_{1,b}) + V^D_{b,c}(R'_{1,a}) \; . \qquad \text{(III,23)}$$

Die Potentiale sind hier in den jeweiligen Relativkoordinaten ausgedrückt, so wie man dies auch machen würde, wenn man drei Nukleonen vorliegen hätte.

Beachtet man noch, daß gilt

$$\langle R' | (T_1 + T_2) | R'' \rangle = (T_1' + T_2') \langle R' | R'' \rangle \ , \qquad \text{(III,24)}$$

wobei T_1' z. B. auf die Koordinate R_1' wirkt, so läßt sich (III,18) schreiben zu

$$(T_1' + T_2' + V_3^D - E_{rel}) \langle R' | R'' \rangle \ . \qquad \text{(III,25)}$$

Auf χ wirkt also ein lokaler Operator:

$$(T_1' + T_2' + V_3^D(R_1', R_2') - E_{rel}) \cdot \chi(R_1', R_2') \ . \qquad \text{(III,26)}$$

III.3. Zwei-Cluster-Austauschterme

In diesem Abschnitt werden diejenigen Teile von

$$\hat{A}' \approx 1 + \sum_i (-1)^i \cdot P_i \qquad \text{(III,27)}$$

behandelt, die nur Teilchenindizes zwischen zwei der drei Cluster vertauschen, also Terme der Art

$$\langle \phi_a \phi_b \phi_c R' | (H-E) \cdot \hat{A}'' \cdot P_{ab} | \phi_a \phi_b \phi_c R'' \rangle$$

$$= \langle \phi_a \phi_b \phi_c R' | (H-E) \cdot P_{ab} | \phi_a \phi_b \phi_c R'' \rangle \quad . \qquad \text{(III,28)}$$

Wieder mit den Aufspaltungen (III,16) und (III,17) von H erhält man

$$\langle \phi_a \phi_b R' | (H_a + H_b + T_{1,c} + V_{a,b}) \cdot P_{ab} | \phi_a \phi_b R'' \rangle \langle \phi_c | \phi_c \rangle$$

$$- E \langle \phi_a \phi_b R' | P_{ab} | \phi_a \phi_b R'' \rangle \langle \phi_c | \phi_c \rangle \qquad \text{(III,29)}$$

$$+ \langle \phi_a \phi_b \phi_c R' | (H_c + T_{2,c} + V_{ab,c}) \cdot P_{ab} | \phi_a \phi_b \phi_c R'' \rangle \quad .$$

Die ersten beiden Terme treten auch in der Zwei-Cluster-RG-Gleichung für das Subsystem A+B auf. Der erste ergibt den energieunabhängigen Teil K_{ab} des sogenannten Austauschkerns, der zweite den sogenannten Normkern N_{ab}.

Es sei hier noch der Sonderfall erwähnt, daß die zwei Cluster A und B identisch sind. Dann liefert ein Austausch $P_{ab,n}$ aller n Teilchen dasselbe wie der Direktterm /6/, nur erhält man statt $\delta(P'_{1,c} - P''_{1,c})$ jetzt $\delta(P'_{1,c} + P''_{1,c})$ oder anders gesehen eine Relativwellenfunktion mit Argument $-P''_{1,c}$.

Für den Austausch von n' Teilchen gilt

$$P_{ab,n'} \cdot P_{ab,n} = (-1)^{n'} \cdot P_{ab,n-n'} \quad , \qquad \text{(III,30)}$$

damit also

$$P_{ab,n'}\, R_{1,c} = (-1)\, P_{ab,n-n'}\, R_{1,c} \qquad \text{(III,31)}$$

und

$$P_{ab,n'}\, (\phi_a \cdot \phi_b) = (-1)^n \cdot P_{ab,n-n'}\, (\phi_a \cdot \phi_b) \ . \qquad \text{(III,32)}$$

Es genügt deshalb, Austauschterme nur bis zu n' = n/2 zu berücksichtigen, wenn man für die Relativwellenfunktionen nur symmetrische bzw. antisymmetrische Funktionen in $R''_{1,c}$

$$\chi(R''_{1,c}, R''_{2,c}) + (-1)^n \cdot \chi(-R''_{1,c}, R''_{2,c}) \qquad \text{(III,33)}$$

zuläßt.

In diesem Sinne erhält man also auch wieder die übliche RG-Gleichung mit lokalem Direktterm und nichtlokalen Austauschtermen.

Man kann aber auch die δ-Funktionen

$$\delta(R'_{1,c} - R''_{1,c}) \pm \delta(R'_{1,c} + R''_{1,c}) \qquad \text{(III,34)}$$

zu den Operatoren rechnen, die dann auf beliebige Funktionen $\chi(R'_{1,c}, R''_{2,c})$ wirken. Bei den Zwei-Cluster-RG-Gleichungen erhält man so betrachtet neben lokalen Anteilen

$$(T'_{1,c} + V^D_{a,b} - E_{rel}) \cdot \delta(R'_{1,c} - R''_{1,c}) \qquad \text{(III,35)}$$

auch nichtlokale Anteile

$$(T'_{1,c} + V^D_{a,b} - E_{rel}) \cdot \delta(R'_{1,c} + R''_{1,c}) \ . \qquad \text{(III,36)}$$

Da die δ-Funktionen auch bei K_{ab} und N_{ab} stehen, führt dies dazu, daß Relativwellenfunktionen mit der falschen Symmetrie in $R''_{1,c}$ triviale (redundante) Lösungen der Gleichung sind.

Nach diesen Zwischenbemerkungen sollen nun wieder die Terme in (III,29) betrachtet werden. Es ist dort

$$\langle\phi_a\phi_b\phi_c R' | H_c \cdot P_{ab} | \phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle$$

$$= \langle\phi_a\phi_b R' | P_{ab} | \phi_a\phi_b R''\rangle \langle\phi_c | H_c | \phi_c\rangle$$

$$= E_c \langle\phi_a\phi_b R' | P_{ab} | \phi_a\phi_b R''\rangle \quad , \qquad \text{(III,37)}$$

da P_{ab} nicht auf die Koordinaten des Clusters C wirkt. Es ergibt sich also

$$E_c \langle R' | N_{ab} | R''\rangle \quad . \qquad \text{(III,38)}$$

Ebenso wird der Schwerpunkt s_{ab} der Cluster A und B und damit $R_{2,c} = s_{ab} - s_c$ durch P_{ab} nicht geändert und deshalb gilt

$$\langle\phi_a\phi_b\phi_c R' | T_{2,c} \cdot P_{ab} | \phi_a\phi_b\phi_c R''\rangle = T'_{2,c} \langle R' | N_{ab} | R''\rangle \quad . \qquad \text{(III,39)}$$

Die Terme mit dem nichtlokalen Normoperator N_{ab} sind zusammengefaßt

$$(E-E_c-T'_{2,c}) \langle R' | N_{ab} | R''\rangle \qquad \text{(III,40)}$$

$$= (E-E_c-T'_{2,c}) \int N_{ab}(R'_{1,c}, R''_{1,c}) \chi(R''_{1,c}, R'_{2,c}) \, dR''_{1,c} \quad .$$

Der Operator beim Normterm ergibt gerade die Gesamtenergie, die dem Subsystem A+B nach Abzug der Bindungs- und Relativenergie des dritten Clusters zur Verfügung steht.

Das Auftreten von Größen der Art

$$E_{rel,c} = E - E_c - T'_{2,c} \qquad \text{(III,41)}$$

ist typisch für Dreikörpersysteme. Im Dreinukleonenfall treten sie auf, wenn Größen für die einzelnen Kanäle definiert werden. Die t-Matrix für den Kanal α z. B. lautet in

Impulsdarstellung

$$\langle \vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha | t_\alpha(z) | \vec{p}_\alpha', \vec{q}_\alpha' \rangle = \delta(\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\alpha') \langle \vec{p}_\alpha | \hat{t}_\alpha(z - \frac{\vec{q}_\alpha^{\,2}}{2M_\alpha}) | \vec{p}_\alpha' \rangle \ . \qquad \text{(III,42)}$$

Die $\vec{p}$, $\vec{q}$ sind die kanonisch konjugierten Impulse zu den Relativkoordinaten, z ist die hier komplexe Gesamtenergie, $\vec{q}_\alpha^{\,2}/(2M_\alpha)$ mit der reduzierten Masse M_α entspricht einem Operator der kinetischen Energie der Relativbewegung, $\hat{t}_\alpha$ ist die Zweiteilchenstreumatrix im Zweiteilchenraum, die zu t_α gehört.

In der Drei-Cluster-RG-Formulierung treten diese charakteristischen Energieterme allerdings von Anfang an im Operator der effektiven Wechselwirkung auf. Im Drei-Nukleonen-Fall ist dies nur dann der Fall, wenn energieabhängige Nukleon-Nukleon-Potentiale vorliegen.

Die bisher betrachteten Terme von (III,29) zusammengefaßt geben

$$(K_{ab}(R''_{1,c}, R'_{1,c}) + E_{rel,c} \cdot N_{ab}(R''_{1,c}, R'_{1,c})) \cdot \delta(R''_{2,c} - R'_{2,c}) \qquad \text{(III,43a)}$$

oder kurz

$$\langle R' | K_{ab} + E_{rel,c} \cdot N_{ab} | R'' \rangle \ . \qquad \text{(III,43b)}$$

Die nichtlokalen Operatoren K_{ab} und N_{ab} ergeben eine nichtlokale, energieabhängige effektive Wechselwirkung zwischen den Clustern A und B. Diese ist im wesentlichen dieselbe wie die, die man aus der entsprechenden Zwei-Cluster-RG-Gleichung erhalten hätte.

Es bleibt von (III,29) noch der Term

$$\langle \phi_a\phi_b\phi_c R' | V_{ab,c}(r,R_{1,c},R_{2,c})\cdot P_{ab} | \phi_a\phi_b\phi_c R'' \rangle . \quad \text{(III,44)}$$

Die einzelnen Potentiale in $V_{ab,c}$ hängen von den inneren Koordinaten r der Cluster und den Relativkoordinaten $R_{1,c}$ und $R_{2,c}$ ab. P_{ab} beeinflußt $R_{1,c}$, aber nicht $R_{2,c}$. Nach Transformation auf linear unabhängige Koordinaten r', $\tilde{R}_{1,c} = P_{ab}\cdot R_{1,c}$ und $R_{2,c}$ erhält man

$$\int \phi_a\phi_b\phi_c \delta(R_{1,c}-R'_{1,c})\,\delta(R_{2,c}-R'_{2,c})\,V_{ab,c}(r,R_{1,c},R_{2,c})$$

$$\times (P_{ab}\phi_c)\,\delta(\tilde{R}_{1,c}-R''_{1,c})\,\delta(R_{2,c}-R''_{2,c})\; dr'd\tilde{R}_{1,c}dR_{1,c}dR_{2,c}$$

(III,45)

und nach Integration über r', $\tilde{R}_{1,c}$, $R_{1,c}$ und $R_{2,c}$

$$\tilde{V}_{ab,c}(R'_{1,c},R''_{1,c},R'_{2,c})\,\delta(R'_{2,c}-R''_{2,c})$$

$$= \langle R' | \tilde{V}_{ab,c} | R'' \rangle \quad . \qquad \text{(III,46)}$$

Der Operator $\tilde{V}_{ab,c}$ ist also nichtlokal in der Relativkoordinate $R'_{1,c}$ zwischen Cluster A und B, aber lokal in der Koordinate $R'_{2,c}$ zum Cluster C.

Für den Fall, daß die Cluster A und B identisch sind, so gilt dies mit denselben Modifikationen wie schon bei K_{ab} und N_{ab}, also für in $R''_{1,c}$ symmetrische oder antisymmetrische Relativwellenfunktionen.

Transformiert man auf ein anderes System von Jakobikoordinaten, so sind die Verhältnisse nicht mehr so leicht überschaubar. So sind zum Beispiel nur drei der Koordinaten $R'_{1,b}$, $R''_{1,b}$, $R'_{2,b}$, $R''_{2,b}$ in diesem Fall linear unabhängig, im c-System sieht man dies wegen der δ-Funktion $\delta(R''_{2,c}-R'_{2,c})$ sofort.

Erwähnenswert ist noch, daß diese effektive Wechselwirkung $\tilde{V}_{ab,c}(R''_{1,c},R'_{1,c},R'_{2,c})$ bereits eine Dreikörperwechselwirkung ist und in den effektiven Zwei-Cluster-Subsystem-Potentialen nicht enthalten ist. Da sie durch die Permutation P_{ab} erzeugt wird, tritt sie auch dann auf, wenn der Cluster C wegen Unterscheidbarkeit nicht mit dem System A + B antisymmetrisiert werden muß. Ein Beispiel hierfür wäre die Wechselwirkung eines Mesons mit zwei Clustern von Nukleonen /4/.

Die ganzen Folgerungen dieses Abschnitts gelten natürlich entsprechend für die anderen Subsysteme und die dazugehörigen Permutationen und Koordinatensysteme.

Die drei effektiven Zwei-Cluster-Subsystem-Wechselwirkungen, wie sie aus einem Zwei-Cluster-Ansatz folgen, sind also in der Drei-Cluster-Formulierung vollständig enthalten. Dazu kommen noch die effektiven Wechselwirkungen $\tilde{V}_{ab,c}(R''_{1,c},R'_{1,c},R'_{2,c})$, $\tilde{V}_{ac,b}(R''_{1,b},R'_{1,b},R'_{2,b})$ und $\tilde{V}_{bc,a}(R''_{1,a},R'_{1,a},R'_{2,a})$ entsprechend (III,46).

III.4. Drei-Cluster-Austauschterme

Vom Intercluster-Antisymmetrisierer $\hat{A}'$ bleiben jetzt noch die Permutationen zu untersuchen, die Teilchenidizes zwischen allen drei Clustern vertauschen. In (III,11) sind dies Terme

$$\langle \phi_a\phi_b\phi_c R' | (H - E)\cdot P_{abc} | \phi_a\phi_b\phi_c R'' \rangle \ . \qquad \text{(III,47)}$$

Anders als im vorigen Abschnitt modifiziert P_{abc} jetzt beide äußeren Koordinaten. Wenn alle drei Cluster voneinander verschieden sind, sind die Koordinaten R_1, $\tilde{R}_1 = P_{abc}\cdot R_1$, R_2 und $\tilde{R}_2 = P_{abc}\cdot R_2$ linear unabhängig und man erhält nach Transformation auf diese Koordinaten und Integration über die restlichen inneren Koordinaten Terme, die nichtlokal in allen Relativkoordinaten sind. Zusammengefaßt seien sie

$$K_{abc}(R_1'',R_1',R_2'',R_2') + E\cdot N_{abc}(R_1'',R_1',R_2'',R_2')$$

$$= \langle R' | (K_{abc} + E\cdot N_{abc}) | R'' \rangle \ . \qquad \text{(III,48)}$$

Diese Terme sind in den effektiven Subsystem-Potentialen natürlich nicht vorhanden. Sie spielen nur dann eine Rolle, wenn alle drei Cluster nahe beieinander sind. Sie sind kompakte Operatoren im Raum der Cluster-Relativkoordinaten, anders als die Zwei-Cluster-Austauschterme, die ja in einer Relativkoordinate auf eine δ-Funktion führen.

Wenn allerdings zwei oder alle drei Cluster identisch sind, so sind immer dann die Koordinaten R_1, $\tilde{R}_1$, R_2 und $\tilde{R}_2$ linear abhängig, wenn die Teilchen mindestens eines Clusters vollständig durch die eines anderen ersetzt werden. Ein Beweis dafür ist im Anhang zu finden.

Sind nur zwei Cluster, etwa A und B identisch, so sind drei der obigen Koordinaten linear unabhängig. Nach Transformation und Integration erhält man einen Term

$$K'_{abc}(R''_{1,c},R'_{1,c},R''_{2,c},R'_{2,c})\cdot$$

$$\cdot\delta(R''_{2,c}-aR'_{1,c}-bR''_{1,c}-cR'_{2,c}) \quad ,$$

der nichtlokal in zwei Koordinaten ist, aber lokal in einer dritten. Diese Lokalität ist natürlich nicht so einfach wie im Fall der Zwei-Cluster-Permutationen P_{ab}, wo man eine δ-Funktion $\delta(R''_{2,c}-R'_{2,c})$ hat. Die beliebigen Koeffizienten a, b und c werden durch die lineare Abhängigkeit bestimmt. Drückt man allerdings den Kern eines Austausches P_{ac} oder P_{bc} im diesen Permutationen nicht angepaßten c-Koordinatensystem aus, so erhält man Ausdrücke derselben Art wie bei K'_{abc}.

Dies ist kein Zufall, denn alle Terme zusammen müssen eine Relativwellenfunktion liefern, die symmetrisch bzw. antisymmetrisch in der Koordinate $R''_{1,c}$ sind. Dies kommt dadurch zustande, daß Drei- und Zwei-Cluster-Permutationen zur selben Nebenklasse bezüglich dieser Symmetriegruppe gehören, so daß sich die zugehörigen Austauschterme (einschließlich δ-Funktion) nur um das Vorzeichen von $R''_{1,c}$ unterscheiden.

Anders gesagt: Es lassen sich stets Paare von Austauschtermen finden, die man zu einem Term mit Relativfunktion

$$\chi(R''_{1,c},R''_{2,c}) \pm \chi(-R''_{1,c},R''_{2,c}) \qquad \text{(III,49a)}$$

zusammenfassen kann. Die Permutation, die dies z. B. zusammen mit einem Austausch P_{ac} leistet, ist $P_{ac}\cdot P_{ab,n}$, also ein Drei-Cluster-Austausch, wobei $P_{ab,n}$ alle Teilchen von A und B austauscht.

Sind drei Cluster identisch, so ist eine Ersetzung eines Clusters durch einen anderen neben den drei Austäuschen von je zwei Clustern nur durch die zwei zyklischen Permutationen aller drei Cluster möglich. Im letzteren Fall

sind nur noch zwei Relativkoordinaten linear unabhängig. Bei der Permutation $P_{(abc)}$ zum Beispiel, die Cluster A in B, B in C und C in A überführt, gilt nämlich

$$P_{(abc)} \cdot R_{1,c} = R_{1,b}$$

und

$$P_{(abc)} \cdot R_{2,c} = R_{2,b} \quad ; \qquad \text{(III,50)}$$

man erhält also δ-Funktionen $\delta(R''_{1,c}-R'_{1,b}) \cdot \delta(R''_{2,c}-R'_{2,b})$. Diese Austäusche liefern also dieselben Terme wie die identische Permutation im b-System. Beim Direktterm steht dann insgesamt, wenn man für den Augenblick ungerade Clusternukleonenzahl annimmt, eine Relativwellenfunktion

$$\chi(R'_{1,c},R'_{2,c}) - \chi_{(ab)}(-R'_{1,c},R'_{2,c}) - \chi_{(bc)}(-R'_{1,a},R'_{2,a})$$

$$- \chi_{(ac)}(-R'_{1,b},R'_{2,b})$$

$$+ \chi_{(acb)}(R'_{1,a},R'_{2,a}) + \chi_{(abc)}(R'_{1,b},R'_{2,b}) \quad .$$

Die Indizes sollen angeben, aus welchen Permutationen die einzelnen Anteile der Relativfunktion entstanden sind, $\chi_{(ab)}$ z. B. aus $P_{ab,n}$.

Der gesamte Ausdruck hat natürlich dieselbe Symmetrie wie ein total antisymmetrischer Dreiteilchenzustand, wenn man für die Clusterschwerpunktskoordinaten Einteilchenkoordinaten setzt. Bei gerader Nukleonenzahl in den Clustern erhält man entsprechend einen total symmetrischen Zustand.

Bei den anderen Austauschtermen muß man in diesem Fall die Nebenklassen der Permutationen bezüglich dieser Symmetriegruppe zusammenfassen, um auch wieder eine Relativwellenfunktion (III,49) herausziehen zu können.

Auch die Relativfunktion (III,49) kann man entsprechend der Bemerkungen im vorigen Abschnitt mit zwei bzw. sechs δ-Funktionen schreiben und diese dann auf die

Operatoren überwälzen.

Erwähnt werden muß noch, daß Terme der hier beschriebenen Art auch durch Wirkung von Austauschoperatoren in den Nukleon-Nukleon-Potentialen erzeugt werden können. Dies geschieht dann, wenn zwei Cluster schon fast identisch sind und durch einen Austausch von Spin oder Isospin mit dem dritten Cluster identisch gemacht werden. Die entsprechende δ-Funktion für das Subsystem der "identischen" Teilchen kann dann nur bei diesen speziellen Austauschpotentialen abgespaltet werden.

III.5. Zusammenfassung

Die Terme der Abschnitte III.2. bis III.4. führen zusammengefaßt auf die Gleichung

$$\int \langle R' | \Big(T_1' + T_2' + V_3^D + \tilde{K}_{ab}(E-E_c-T_{2,c}') + \tilde{K}_{ac}(E-E_b-T_{2,b}') + \tilde{K}_{bc}(E-E_a-T_{2,a}') + \tilde{V}_{ab,c} + \tilde{V}_{ac,b} + \tilde{V}_{bc,a} + \tilde{K}_{abc}(E) \Big) | R'' \rangle \langle R'' | \chi \rangle \, dR''$$

$$= (E - E_a - E_b - E_c) \langle R' | \chi \rangle \quad , \qquad \text{(III,51a)}$$

wobei $\tilde{K}_{abc}(E) = K_{abc} + E \cdot N_{abc}$ ist.

Geht man zurück bis zur Aufspaltung (III,23) von V_3^D, so kann man für die effektive Zwei-Körper-Wechselwirkung etwa zwischen den Clustern A und B schreiben

$$V_{ab}^{eff} = V_{ab}^D + \tilde{K}_{ab}(E-E_c-T_{2,c}') \quad . \qquad \text{(III,52)}$$

Sie ist also teils lokal, teils nichtlokal und energieabhängig. Zu den drei Wechselwirkungen zwischen je zwei Clustern kommt noch eine Dreikörperwechselwirkung

$$V_{abc}^{eff} = \tilde{V}_{ab,c} + \tilde{V}_{ac,b} + \tilde{V}_{bc,a} + \tilde{K}_{abc}(E) \quad . \qquad \text{(III,53)}$$

Die Gleichung (III,51a) lautet dann kürzer

$$\int \langle R' | (T_1' + T_2' + V_{ab}^{eff} + V_{ac}^{eff} + V_{bc}^{eff} + V_{abc}^{eff}) | R'' \rangle \langle R'' | \chi \rangle \, dR'' = E_{rel} \langle R' | \chi \rangle \quad . \qquad \text{(III,51b)}$$

Beide Gleichungen können als Schrödingergleichungen mit effektiven, zum Teil energieabhängigen Potentialen in

Variablen R_1 und R_2 aufgefaßt werden.

Der energieabhängige Teil von $\tilde{K}_{ab}$ z. B. enthält allerdings auch den Operator $T_{2,c}$, in Ortsdarstellung also einen Differentialoperator in der Koordinate $R_{2,c}$. Es liegt also eine ziemlich komplizierte Integrodifferentialgleichung vor.

Im Fall identischer Teilchen erhält man die schon erwähnten Modifikationen. Insbesondere kann man jeden Term von (III,51) mit drei bzw. sechs δ-Funktionen schreiben und diese zu den Operatoren hinzunehmen.

In dieser Interpretation auftretende Terme z. B. der Art

$$K(R_1',R_1'')\cdot\delta(R_2' - R_2'')\cdot\delta(R_1' + R_1'') \qquad \text{(III,54)}$$

sind zwar bereits Drei-Körper-Potentiale, da sie sich nicht als Summen von Zwei-Körper-Potentialen schreiben lassen. Die Wirkung aller dieser Terme besteht aber nur darin, Relativwellenfunktionen der falschen Symmetrie zu redundanten Lösungen der gesamten Drei-Cluster-RG-Gleichung zu machen. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn diese Terme allein durch Austauschpotentiale erzeugt wurden.

Um zu verdeutlichen, wie es zu diesen Drei-Körper-Potentialen kommen kann, seien die folgenden Bemerkungen gemacht: Spin-Isospin-Austauschpotentiale sind (genau genommen) auch im Zwei-Nukleonen-System nichtlokale Operatoren, wenn man sie gemäß der Vorschrift wie im Zwei-Cluster-Formalismus

$$\langle R'\phi_1\phi_2' | V\cdot P^{\sigma,\tau}\cdot\hat{A} | \phi_1\phi_2' R''\rangle \qquad \text{(III,55)}$$

berechnet. Die ϕ,ϕ' sind nur Spin-Isospin-Funktionen der Teilchen 1 und 2, $P^{\sigma,\tau}$ ist einer der Austauschoperatoren P^{σ}, P^{τ} oder $P^{\sigma}\cdot P^{\tau}$, V ist der lokale Ortsanteil des Austauschpotentials.

Wenn ein Spin-Isospin-Austauschoperator die Funktion $\phi_1 \cdot \phi_2'$ nicht ändert, führt er auf ein lokales Potential $V(R') \cdot \delta(R' - R'')$. Vertauscht er gerade die Funktionen der beiden Teilchen zu $\phi_1' \cdot \phi_2$, so erhält man zunächst formal

$$-V(R')\delta(R' + R''). \qquad \text{(III,56)}$$

Weil aber für alle physikalisch verwendeten Potentiale gilt

$$V(r_1 - r_2) = V(r_2 - r_1), \qquad \text{(III,57)}$$

kann man auch diesen zunächst nichtlokalen Teil wieder lokal als

$$-V(R')\delta(R' - R'') \qquad \text{(III,58)}$$

schreiben. Man kann also Matrixelemente wie mit lokalen Operatoren bilden, die Spin-Isospin-Eigenschaften des Systems schlagen sich nur in den Vorzeichen des entsprechenden Potentialteils nieder.

Dies ändert sich jedoch, sobald mehr als zwei Teilchen vorliegen. Das Pauliprinzip fragt in Gegenwart z. B. eines Austauschpotentials zwischen Teilchen aus Clustern A und B auch nach verbotenen Zuständen zwischen den Clustern A und C. Diese Abfrage ist eine nichtlokale Operation, und zusammen mit einem nichtlokalen Austauschpotential im anderen Subsystem erhält man ein Drei-Körper-Potential, das nichtlokal zwischen allen drei Teilchen ist.

Es sei noch angemerkt, daß man mit den Normtermen für einen beliebigen, noch nicht antisymmetrischen A-Teilchen-Zustand

$$|\psi> = |\phi\chi> \qquad \text{(III,59)}$$

schreiben kann

$$|| \hat{A}|\psi> || = <\psi|\hat{A}|\psi>$$

$$\sim <\chi|(1 - N_{ab} - N_{ac} - N_{bc} - N_{abc})|\chi>$$

$$= <\chi|(1 - N)|\chi> \quad . \qquad \text{(III,60)}$$

Der Normkern N enthält den Einfluß des Pauli-Prinzips. Die Eigenfunktionen zum Eigenwert 1 von N sind die pauliverbotenen Relativfunktionen /7/, denn aus

$$N|u> = |u> \qquad \text{(III,61)}$$

folgt

$$\hat{A}|\phi u> = 0 \quad . \qquad \text{(III,62)}$$

Diese Eigenschaft haben bereits Funktionen $u_1(R_1)\cdot f(R_2)$, wenn u_1 z. B. pauliverboten in der Relativbewegung der Cluster A und B ist, also Eigenfunktion des Zwei-Cluster-Normterms N_{ab} zum Eigenwert 1 ist. Die Funktion f in der zweiten Relativkoordinate kann dabei beliebig sein. Physikalisch ist dies plausibel, mehr mathematisch gesehen steht dahinter

$$\hat{A} = \hat{A}\cdot\hat{A}_{ab} \quad , \qquad \text{(III,63)}$$

wenn $\hat{A}_{ab}$ das System A + B antisymmetrisiert.

Dies bedeutet, daß man unendlich viele Eigenfunktionen zum Eigenwert 1 hat, der Operator N ist also nicht kompakt. Dies rührt natürlich daher, daß er Anteile wie N_{ab} enthält, die im Dreikörperraum nicht kompakt sind. Zieht man allerdings von N die drei Subsystemnormkerne ab, so ist der Rest, nämlich N_{abc}, dann kompakt.

Die folgenden zusätzlichen Anmerkungen sollen das Zusammenwirken der verschiedenen Terme der effektiven Wechselwirkung verdeutlichen.

Die Matrixelemente von Operatoren M mit A-Teilchen-Wellenfunktionen $\psi_u = \phi \cdot u$, die mit pauliverbotenen Relativwellenfunktionen u gebildet werden, sind O, da ψ_u durch Antisymmetrisierung auf O projiziert wird und mit beliebigem ψ' gilt

$$\langle \psi' | M | \hat{A} \psi_u \rangle = \langle \psi' | M | O \rangle = O \ . \qquad \text{(III,59)}$$

Führt man bei der obigen Gleichung zuerst alle Integrationen über innere Koordinaten aus, so sieht man, daß alle Austauschterme $\langle \chi' | \tilde{M}_i | u \rangle$, die mit Permutationen P_i des Antisymmetrisierers $\hat{A}$ etwa aus

$$\langle \psi' | M | P_i \ \psi_u \rangle = \langle R' \phi | M \cdot P_i | \phi \cdot u \rangle \qquad \text{(III,60)}$$

entstanden sind, zusammen gerade den Direktterm

$$\langle R' | M_d | u \rangle \qquad \text{(III,61)}$$

kompensieren, der aus

$$\langle R' \cdot \phi | M \cdot 1 | \phi \cdot u \rangle \qquad \text{(III,62)}$$

entstanden ist.

Einen Einblick in die Rolle der Drei-Cluster-Austauschterme erhält man wohl am einfachsten in dem Fall, daß eine Wellenfunktion ψ_u bereits in einem Zwei-Cluster-Subsystem, etwa A+B, pauliverboten ist. Den Subsystem-Antisymmetrisierer kann man auch schreiben

$$\hat{A}_{ab} \sim 1 + Q_{ab} \ , \qquad \text{(III,63)}$$

wobei Q_{ab} für die Summe aller Permutationen zwischen Teilchen aus A und B einschließlich des Vorzeichens der Permutation steht. Die Nebenklasse der Permutationen im Intercluster-Antisymmetrisierer kann man aufspalten in

$$\hat{A}' = 1 + Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ac} + Q_{abc} \ . \qquad \text{(III,64)}$$

Q_{bc} und Q_{ac} sind analog zu Q_{ab} definiert, Q_{abc} enthält die Permutationen zwischen drei Clustern. Laut Voraussetzungen ist bei beliebigem $\psi' = \phi \cdot R'$

$$\langle \psi' | M \cdot (1 + Q_{ab}) | \psi_u \rangle = 0 \qquad \text{(III,65)}$$

und daher

$$\langle \psi' | M \cdot (Q_{bc} + Q_{ac} + Q_{abc}) | \psi_u \rangle = 0 \quad . \qquad \text{(III,66)}$$

Der Drei-Cluster-Austauschterm

$$\langle \psi' | M \cdot Q_{abc} | \psi_u \rangle = \langle \chi' | \tilde{M}_{abc} | u \rangle \qquad \text{(III,67)}$$

muß also gerade die Beiträge der Zwei-Cluster-Austauschterme

$$\langle \psi' | M \cdot (Q_{bc} + Q_{ac}) | \psi_u \rangle = \langle \chi' | \tilde{M}_{bc} | u \rangle + \langle \chi' | \tilde{M}_{ac} | u \rangle \qquad \text{(III,68)}$$

in den Subsystemen, in denen ψ_u nicht pauliverboten ist, kompensieren.

Ist in (III,65) M ein Operator, der nicht nur auf die Teilchen im System A+B wirkt, so muß trotzdem gelten

$$\langle \psi' | M | \psi_u \rangle + \langle \psi' | M \cdot Q_{ab} | \psi_u \rangle$$

$$= \langle R' | \tilde{M}_d | u \rangle + \langle R' | \tilde{M}_{ab} | u \rangle = 0 \; . \qquad \text{(III,69)}$$

Der Operator $\tilde{M}_{ab}$ ist ein Drei-Körper-Operator von der Art, die im Zusammenhang mit Gleichung (III,14) behandelt wurde, und er hat hier die Aufgabe, das direkte Matrixelement bei einem pauliverbotenen Zustand gerade zu einem Gesamtbeitrag 0 zu korrigieren. Dies gilt natürlich auch dann, wenn in einem speziellen Fall gar keine weiteren Austauschterme mehr auftreten sollten.

IV. Die effektiven Potentiale im Fall He^4 + n + p

IV.1. Ansatz

Nachdem die im Rahmen eines RG-Ansatzes auftretenden effektiven Wechselwirkungen allgemein klassifiziert wurden, soll nun an einem Beispiel gezeigt werden, wie diese Terme in der Praxis aussehen. Hierzu wurde das Drei-Cluster-System He^4 + n + p gewählt, das etwa zur Beschreibung der Streuung von Deuteronen an Helium geeignet wäre.

In einem Zwei-Cluster-Ansatz He^4 + d müßten wegen des nur schwach gebundenen Deuterons auf jeden Fall Distortionen zum Deuteron mitgenommen werden. Möglich wäre auch noch die Hinzunahme einer zweiten Zwei-Cluster-Partition He^3 + t. Beides wurde schon in RG-Rechnungen durchgeführt /6/.

In einem allgemeinen Drei-Cluster-Ansatz entsprechend (II,3) ist die Möglichkeit He^4 + d in der Partition He^4 + n + p bereits enthalten, da die Drei-Körper-Relativwellenfunktion χ auch eine Bindung zwischen Neutron und Proton beschreiben kann. Für Deuteron-Distortionen und -Anregungen gilt dies ebenfalls. Erst die Partition He^3 + t z. B. ergäbe einen linear unabhängigen Beitrag auf der Zwei-Cluster-Stufe im Ansatz (II,3).

Wie schon in Kapitel III wird im folgenden aber nur mit einem reinen Drei-Cluster-Ansatz He^4 + n + p ohne Korrekturen gerechnet, da das α-Teilchen in sehr guter Näherung als nicht beeinflußbar angesehen werden kann.

Der Ortsanteil der α-Bindungsfunktion wird wie üblich /4,6/ durch eine Gaußfunktion

$$\phi(r_\alpha) = n_\alpha \cdot \exp\{ -\frac{a}{2} \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i^2 \} \qquad \text{(IV,1)}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$n_\alpha = \left(\frac{a^3}{4\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{(IV,2)}$$

beschrieben. Hierin ist $\bar{r}_i = r_i - s_\alpha$, wobei r_i die Koordinate des i-ten Teilchens und s_α der Schwerpunkt des α-Teilchens ist. Der Normierungsfaktor bezieht sich auf Integration über Jakobikoordinaten, nicht über Koordinaten $\bar{r}_i$.

Für die "Cluster" p und n braucht man natürlich keine Bindungsfunktion. Auch die Intraclusterantisymmetrisierung fällt in diesem Fall weg.

Der Ansatz für die Spin-Isospinfunktion vor Antisymmetrisierung sei

$$\{ (n\uparrow)_1 (p\uparrow)_2 (n\downarrow)_3 (p\downarrow)_4 \} \; (n\uparrow)_5 (p\uparrow)_6 \quad . \qquad \text{(IV,3)}$$

Die Funktion in geschweifter Klammer ist nach Antisymmetrisierung des α-Clusters Eigenfunktion zu $S_\alpha = 0$ und $T_\alpha = 0$ /6/, bei den Teilchen 5 und 6 erhält man $S_{56} = 1$ und $T_{56} = 0$, also den Spin-Isospinzustand des Deuterons.

In Anlehnung an viele RG-Rechnungen /4,6/ wird als Potential verwendet

$$V(r_i - r_j) = (w - m \cdot P^\sigma_{ij} P^\tau_{ij} + b \cdot P^\sigma_{ij} - h \cdot P^\tau_{ij}) \cdot V_o \cdot v_{ij} + V^c_{ij} \quad . \qquad \text{(IV,4)}$$

Die $P^\sigma_{ij}, P^\tau_{ij}$ sind die üblichen Spin- und Isospinaustauschoperatoren, V_o ist die Potentialtiefe und v_{ij} ist eine Gaußfunktion

$$v_{ij} = \exp \{ -\beta \cdot (r_i - r_j)^2 \} \quad . \qquad \text{(IV,5)}$$

V^c_{ij} ist das Coulombpotential, falls Teilchen i und j Protonen sind. Die spezielle Wahl der Potentialparameter ist für das Weitere ohne Belang.

Zu erwähnen ist höchstens noch, daß dies ein reines Zentralpotential ist. Die Berücksichtigung etwa von Spin-Bahn-Kopplung in der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung wäre möglich. Rechnungen mit Kräften dieser Art wurden z. B. schon vor längerer Zeit im System $\alpha + n$ durchgeführt /8/. Im Rahmen einer ersten Übersicht ist es aber wohl besser, die dadurch auftretenden Komplikationen zu vermeiden und damit die hier zunächst wesentlicheren Gesichtspunkte klarer hervortreten zu lassen.

IV.2. Zwei-Körper-Wechselwirkungen

Für das Zwei-Cluster-System $\alpha + n$ liegen die Ergebnisse einer RG-Rechnung vor (Ref. 6, S. 106 ff). Für das System $\alpha + p$ erhält man wegen der Symmetrie des α-Clusters bis auf zwei zusätzliche Coulombterme dasselbe Ergebnis. Man muß dazu nur die Relativkoordinate $R_{1,p}$ zwischen α und n durch die dem System $\alpha + p$ entsprechende $R_{1,n}$ ersetzen. Im dritten Subsystem $n + p$ ist das effektive Potential natürlich die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung selbst.

Zu den Coulombtermen sei noch bemerkt, daß es erfahrungsgemäß genügt, entweder nur den Direktterm zu berücksichtigen oder im Austauschterm nur den ersten Teil einer Entwicklung des überintegrierten Coulombpotentials nach Gaußfunktionen mitzunehmen, und das erstere wird der Einfachheit halber im folgenden getan.

Zu den obigen drei bereits bekannten effektiven Subsystemwechselwirkungen kommt nun noch die Drei-Körper-Wechselwirkung $V^{eff}_{\alpha np}$ entsprechend (III,53) hinzu.

IV.3. Drei-Körper-Wechselwirkungen

IV.3.1. Zwei-Cluster-Austausch

Zunächst werden die Potentiale $\tilde{V}_{\alpha n,p}$, $\tilde{V}_{\alpha p,n}$ und $\tilde{V}_{np,\alpha}$ entsprechend (III,46) behandelt, die durch den Einfluß einer Zwei-Cluster-Antisymmetrisierung auf das Potential zum dritten Cluster entstehen.

Nach Berücksichtigung der Orthogonalität von unterschiedlichen Spin-Isospinfunktionen auf der bra- und ket-Seite der Matrixelemente und Ausführung der Integrationen im Ortsraum erhält man

$$\tilde{V}_{\alpha n,p} = a_1 \cdot \sum_{i=1}^{5} b_{i6} \cdot \exp(-a \cdot \kappa_{i6}) \qquad \text{(IV,6)}$$

mit

$$a_1 = V_o \cdot (4/5)^3 \cdot (4a/3\pi)^{3/2} \qquad \text{(IV,7)}$$

$$b_{16} = b_{56} = w + b$$

$$b_{26} = (w - m + b - h) \, (3a/(3a+2\beta))^{3/2}$$

$$b_{36} = (w \qquad\qquad) \quad -"-$$

$$b_{46} = (w \qquad - h) \quad -"- \qquad \text{(IV,8)}$$

$$\kappa_{26} = \kappa_{36} = \kappa_{46} =$$

$$= \{(34a+28\beta) \cdot (R'^2_{1,p} + R''^2_{1,p}) + (32a+32\beta) \cdot R'_{1,p} \cdot R''_{1,p}$$

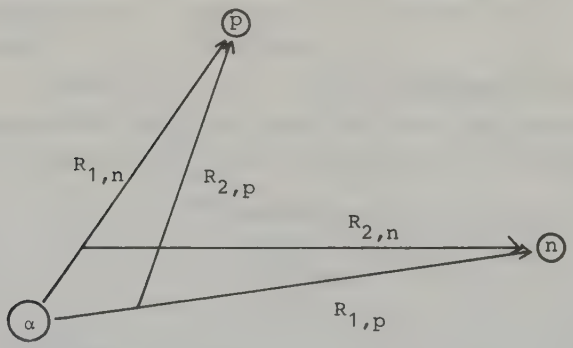
$$+ 40\beta \cdot (R'_{1,p} + R''_{1,p}) \cdot R'_{2,p} + 75\beta \cdot R'^2_{2,p}\} \; / \; (75a+50\beta), \qquad \text{(IV,9a)}$$

$$\kappa_{16} = \{34a\cdot R'^{2}_{1,p} + (34a+48\beta)\cdot R''^{2}_{1,p} + 32a\cdot R''^{2}_{1,p}\cdot R''_{1,p} - 120\beta\cdot R'_{1,p}\cdot R'_{2,p} + 75\beta\cdot R'^{2}_{2,p}\}/\ 75 \qquad \text{(IV,9b)}$$

und

$$\kappa_{56}(R'_{1,p},R''_{1,p},R'_{2,p}) = \kappa_{16}(R''_{1,p},R'_{1,p},R'_{2,p}) \quad . \qquad \text{(IV,9c)}$$

Für $\tilde{V}_{\alpha p,n}$ erhält man dasselbe in den Koordinaten $R'_{1,n}$, $R''_{1,n}$ und $R'_{2,n}$, wenn man $R_{1,n} = r_p - s_\alpha$ definiert. Ein Potential $\tilde{V}_{np,\alpha}$ tritt nicht auf.



IV.3.2. Drei-Cluster-Austausch

In diesem Abschnitt werden die Terme behandelt, die durch einen Austausch $P_{\alpha np}$ zwischen allen drei Partnern, das heißt bei gleichzeitiger Berücksichtigung von n, p und α, zustandekommen.

Den umfangreichsten Beitrag liefert der gleichzeitige Austausch von n und p mit je einem Nukleon des α-Teilchens. Es sei

$$\tilde{K}_2 = K_2 + K_2^t - E \cdot N_2 \quad . \tag{IV,10}$$

Der Normterm N_2 ist

$$N_2 = a_2 \cdot \exp(-a \cdot n_2) \tag{IV,11}$$

mit

$$a_2 = \left(\frac{8a^2}{9\pi^2}\right)^{3/2} \tag{IV,12}$$

$$n_2 = \frac{1}{4}\,(R'^2_{1,\alpha} + R''^2_{1,\alpha}) + \frac{10}{9}\,(R'^2_{2,\alpha} + R''^2_{2,\alpha}) + \frac{16}{9}\,R'_{2,\alpha} \cdot R''_{2,\alpha} \quad . \tag{IV,13}$$

Der Term K_2^t, der aus dem Operator der kinetischen Energie entsteht, lautet

$$K_2^t = a_2 \cdot P \cdot \exp(-a \cdot n_2) \tag{IV,14}$$

mit

$$P = \frac{h^2}{8m\pi^2}\left[\left(\frac{1}{2}\,(R'^2_{1,\alpha} + R''^2_{1,\alpha}) + \frac{112}{27}\,(R'^2_{2,\alpha} + R''^2_{2,\alpha}) + \frac{208}{27}\,R'_{2,\alpha} \cdot R''_{2,\alpha}\right) \cdot a^2 - \frac{31}{2}a\right] \quad . \tag{IV,15}$$

Der Vorfaktor bei P ist der übliche bei der kinetischen Energie, m ist die Nukleonenmasse.

Die Potentiale schließlich ergeben

$$K_2 = a_2 \cdot V_o \sum_{i<j=1}^{6} b_{ij,2} \cdot \exp(-\kappa_{ij,2}) \qquad \text{(IV,16)}$$

mit

$$\begin{aligned}
b_{12,2} &= b_{56,2} = && w + m + b + h \\
b_{13,2} &= b_{24,2} = b_{35,2} = b_{46,2} = && (w + m - b - h)\cdot b_o \\
b_{23,2} &= b_{14,2} = b_{45,2} = b_{36,2} = && (w + m \qquad)\cdot b_o \\
b_{34,2} &= && (w + m + b + h)\cdot b_1 \\
b_{15,2} &= b_{26,2} = && w - 3m + 2b - h \\
b_{25,2} &= b_{16,2} = && w \quad + b \quad ,
\end{aligned} \qquad \text{(IV,17)}$$

wobei

$$b_o = \left(\frac{2a}{2a+\beta}\right)^{3/2} \quad \text{und} \quad b_1 = \left(\frac{a}{a+2\beta}\right)^{3/2} \qquad \text{(IV,18)}$$

ist, und

$$\begin{aligned}
\kappa_{ij,2} = {} & c_{ij}\cdot R'^{2}_{1,\alpha} + d_{ij}\cdot R''^{2}_{1,\alpha} + e_{ij}\cdot R'_{1,\alpha}\cdot R''_{1,\alpha} \\
& + f_{ij}\cdot R'^{2}_{2,\alpha} + g_{ij}\cdot R''^{2}_{2,\alpha} + h_{ij}\cdot R'_{2,\alpha} R''_{2,\alpha} \\
& + k_{ij}\cdot R'_{1,\alpha}\cdot R'_{2,\alpha} + l_{ij}\cdot R''_{1,\alpha}\cdot R''_{2,\alpha} \\
& + m_{ij}\cdot R'_{1,\alpha}\cdot R''_{2,\alpha} + n_{ij}\cdot R''_{1,\alpha}\cdot R'_{2,\alpha} \quad .
\end{aligned} \qquad \text{(IV,19)}$$

Die Koeffizienten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. In ihr ist bereits berücksichtigt, daß gilt

$$\kappa_{i3,2} = \kappa_{i4,2} \qquad (i = 1,2,5,6) \quad . \qquad \text{(IV,20)}$$

Tabelle 1 Koeffizienten in den Exponenten von K_2, Gleichung (IV,16) bis (IV,19)

ij	c_{ij}	d_{ij}	e_{ij}	f_{ij}	g_{ij}	h_{ij}	k_{ij}	l_{ij}	m_{ij}	n_{ij}
12	p_1	p_4	0	p_2	p_2	p_3	0	0	0	0
13	p_1	p_5	0	p_6	p_7	p_8	0	p_9	0	p_{10}
23	p_1	p_5	0	p_6	p_7	p_8	0	$-p_9$	0	$-p_{10}$
34	p_1	p_1	0	p_2	p_2	p_3	0	0	0	0
15	p_{11}	p_{11}	$-p_{12}$	p_{13}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{15}	$-p_{15}$	$-p_{15}$
25	p_{11}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	$-p_{15}$	$-p_{15}$	p_{15}
35	p_5	p_1	0	p_7	p_6	p_8	p_9	0	p_{10}	0
16	p_{11}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{13}	p_{14}	$-p_{15}$	p_{15}	p_{15}	$-p_{15}$
26	p_{11}	p_{11}	$-p_{12}$	p_{13}	p_{13}	p_{14}	$-p_{15}$	$-p_{15}$	p_{15}	p_{15}
36	p_5	p_1	0	p_7	p_6	p_8	$-p_9$	0	$-p_{10}$	0
56	p_4	p_1	0	p_2	p_2	p_3	0	0	0	0

In dieser Tabelle ist

$$p_1 = a/4$$

$$p_2 = 10/9 \cdot a$$

$$p_3 = 16/9 \cdot a$$

$$p_4 = (a + 4\beta)/4$$

$$p_5 = a \cdot (2a + 3\beta)/(8a + 4\beta)$$

$$p_6 = a \cdot (20a + 18\beta)/(18a + 9\beta)$$

$$p_7 = a \cdot (20a + 42\beta)/(18a + 9\beta)$$

$$p_8 = a \cdot (32a + 48\beta)/(18a + 9\beta)$$

$$p_9 = 8a\beta/(6a + 3\beta)$$

$$p_{10} = 4a\beta/(6a + 3\beta)$$

$$p_{11} = (a + \beta)/4$$

$$p_{12} = \beta/2$$

$$p_{13} = (10a + 4\beta)/9$$

$$p_{14} = (16a - 8\beta)/9$$

$$p_{15} = 2\beta/3 \quad . \qquad \text{(IV,21)}$$

Es fehlen jetzt nur noch die Terme, die allein durch den Austauschcharakter der Kernkräfte bedingt sind und durch zyklische Permutationen zwischen den Teilchen n, p und einem aus dem α-Cluster entstanden sind. Sie haben daher die in III.4 erwähnte Eigenschaft, daß sie nur von drei linear unabhängigen Koordinaten abhängen.

Es ist

$$\tilde{K}_3 = a_3 \cdot \sum_{i=1}^{6} K_{i,3} \qquad \text{(IV,22)}$$

mit

$$a_3 = \left[\frac{4a}{3\pi}\right]^{3/2} \cdot V_o \qquad \text{(IV,23)}$$

$$K_{1,3} = (-m - h) \cdot \delta_o \cdot \exp\{ - \frac{5a+24\beta}{24} R'^2_{1,\alpha} - \frac{17a}{24} R''^2_{1,\alpha}$$
$$- \frac{7a}{12} R'_{1,\alpha} \cdot R''_{1,\alpha} - \frac{4a}{3} R'^2_{2,\alpha} + \frac{a}{3} R'_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha}$$
$$+ \frac{5a}{3} R''_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha} \} \qquad \text{(IV,24a)}$$

$$K_{2,3} = (-m - h) \cdot \delta_o \cdot \exp\{ - \frac{5a}{24} R'^2_{1,\alpha} - \frac{17a+24\beta}{24} R''^2_{1,\alpha}$$
$$- \frac{7a}{12} R'_{1,\alpha} \cdot R''_{1,\alpha} - \frac{4a}{3} R'^2_{2,\alpha} + \frac{a}{3} R'_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha}$$
$$+ \frac{5a}{3} R''_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha} \} \qquad \text{(IV,24b)}$$

$$K_{3,3} = (m + h) \cdot b_3 \cdot \delta_o \cdot \exp\{ - \frac{5a+14\beta}{24a+16\beta} a R'^2_{1,\alpha} - \frac{17a+14\beta}{24a+16\beta} a R''^2_{1,\alpha}$$
$$- \frac{7a+10\beta}{12a+8\beta} a R'_{1,\alpha} \cdot R''_{1,\alpha} - \frac{4a+8\beta}{3a+2\beta} a R'^2_{2,\alpha}$$
$$+ \frac{a+6\beta}{3a+2\beta} a R'_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha} + \frac{5a+6\beta}{3a+2\beta} a R''_{1,\alpha} \cdot R'_{2,\alpha} \} , \qquad \text{(IV,24c)}$$

wobei

$$\delta_o = \delta(R''_{2,\alpha} - R'_{2,\alpha} + \tfrac{3}{4}(R'_{1,\alpha} + R''_{1,\alpha})) \quad , \qquad \text{(IV,25)}$$

$$b_3 = \left(\frac{3a + 2\beta}{3a}\right)^{3/2} \qquad \text{(IV,26)}$$

und

$$K_{i,3}(R'_{1,\alpha},R''_{1,\alpha},R'_{2,\alpha})\cdot\delta_o \qquad \text{(IV,27)}$$

$$= K_{i+3,3}(R''_{1,\alpha},R'_{1,\alpha},R''_{2,\alpha})\cdot\delta(R'_{2,\alpha} - R''_{2,\alpha} + \tfrac{3}{4}(R'_{1,\alpha} + R''_{1,\alpha}))$$

für i = 1,2,3.

Mit Hilfe der Distributionsgleichung

$$f(x)\cdot\delta(x-y) = f(y)\cdot\delta(x-y) \qquad \text{(IV,28)}$$

kann man die Exponenten für i = 4,5,6 auch wieder durch $R'_{1,\alpha}$, $R''_{1,\alpha}$ und $R'_{2,\alpha}$ ausdrücken. In dieser Darstellung sieht man K_3 allerdings die Symmetrie bezüglich R' und R'' nicht mehr unmittelbar an.

Daß die Teilchen 5 und 6 nicht identisch sind, wirkt sich nur über Spin und Isospin aus. Der Ortsteil der Matrixelemente ist gleich wie der bei identischen Teilchen. Deshalb ist die in III.4 erwähnte Symmetrie bezüglich der Relativkoordinate zwischen den identischen Teilchen, hier $R_{1,\alpha}$, bei Matrixelementen vorhanden, die durch eine Permutation P bzw. $P\cdot P_{56}$ aus demselben Operator entstanden sind.

Ist P zum Beispiel die Permutation P_{15}, so hat sie eine δ-Funktion $\delta(R'_{2,p} - R''_{2,p})$ zur Folge. Transformiert man diese ins α-System, so erhält man

$$(5/4)^3\cdot\delta(R''_{2,\alpha} - R'_{2,\alpha} + \tfrac{3}{4}(R'_{1,\alpha} - R''_{1,\alpha})) \quad , \qquad \text{(IV,29)}$$

also δ_o bis auf das Vorzeichen von $R''_{1,\alpha}$ und einen Transformationsfaktor.

Auch die Exponenten unterscheiden sich in diesem System nur um das Vorzeichen von $R''_{1,\alpha}$. Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens der Permutationen P_{15} und $P_{15}\cdot P_{56}$ hat man in diesen Termen also gerade Antisymmetrie bezüglich der Vertauschung von Teilchen 5 und 6, man könnte sie also mit den δ-Funktionen $\delta(R'_{1,\alpha} - R''_{1,\alpha}) - \delta(R'_{1,\alpha} + R''_{1,\alpha})$ zusammenfassen.

V. Separable Näherung der effektiven Wechselwirkung

V.1. Wahl des Formfaktors

Die bisher abgeleitete effektive Wechselwirkung ist viel zu kompliziert, um sie mit vernünftigem Aufwand etwa in eine Faddeev-Rechnung einbauen zu können. Dies um so mehr, als sie durch die Wahl der α-Bindungsfunktion und der Nukleon-Nukleon-Potentiale mit einer gewissen Willkür behaftet ist. Aber die wesentlichen Eigenschaften, vor allem soweit sie durch das Pauli-Prinzip bedingt sind, werden durch eine spezielle Wahl dieser Größen kaum beeinflußt. Die innere Repulsion in der effektiven α-α-Wechselwirkung ist ein Beispiel für eine solche Eigenschaft. Man wird daher versuchen, gerade den Einfluß des Pauli-Prinzips möglichst gut zu berücksichtigen.

Am stärksten ist seine Wirkung bei pauliverbotenen Relativfunktionen u, das heißt bei Eigenfunktionen zum Normkern mit Eigenwert 1 /7/.

Der Normkern gibt den Einfluß der gesamten Antisymmetrisierung auf die Relativwellenfunktion am natürlichsten und einfachsten wieder, da er aus $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ entstanden ist. Normterme, die durch einen Teil Q' der Permutationen im Antisymmetrisierer erzeugt werden, berücksichtigen gerade diesen Anteil Q'.

Wenn man also bestimmte Terme der effektiven Wechselwirkung wie z. B. $\tilde{K}_2$ laut (IV,10) aus den oben genannten Gründen separabel annähern will, weil sie dann rechentechnisch insbesondere für eine Faddeev-Rechnung viel besser geeignet sind, und wenn man das Pauli-Prinzip möglichst gut berücksichtigen will, so bietet es sich an, diese separable Näherung in den Eigenfunktionen des entsprechenden Normterms vorzunehmen /4,9/.

Die Eigenwerte dieser Eigenfunktionen sind nämlich ein Maß dafür, wie weit diese durch den entsprechenden Teil Q' des Antisymmetrisierers beeinflußt werden. Der Vorsicht halber soll aber erwähnt werden, daß Eigenfunktionen des gesamten Normkerns (auch zum Eigenwert 1) im allgemeinen nicht Eigenfunktionen von Teilen des Normkerns sein müssen.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß man bisher bei Versuchen, das Pauli-Prinzip angenähert zu berücksichtigen, solche Eigenfunktionen entweder als völlig verboten oder als völlig erlaubt angesehen hat, sei es im Rahmen von Orthogonalitätsstreupotentialen oder durch Einschränkung des Funktionenraums bei Variationsrechnungen /7,10,11,12/.

Völlig pauliverbotene (redundante) Funktionen treten nur im sogenannten Oszillatorgrenzfall auf, wenn alle Bindungsfunktionen Oszillatorfunktionen mit demselben Weiteparameter sind. Wird hiervon nur ein klein wenig abgewichen, so erhält man sofort keine redundanten Lösungen der RG-Gleichungen mehr, sondern nur noch Eigenwerte nahe bei 1 /12/.

In Systemen mit schwereren Clustern kommen auch im Oszillatorgrenzfall neben Eigenfunktionen mit Eigenwert "genau 1" solche mit Eigenwerten nahe bei 1 vor. Sie sind dann bereits sehr stark "paulibehindert" wie oben auch. Bei allmählich kleiner werdenden Eigenwerten ist es dann nicht ganz ohne Willkür, welche man als erlaubt und welche man als verboten ansehen will /12/.

V.2. Eigenfunktionen der Normterme

Wie schon in Abschnitt III.5 erwähnt, ist der gesamte Normkern ein nichtkompakter Operator und hat z. B. unendlich viele Eigenfunktionen zum Eigenwert 1. Daher wurde im letzten Abschnitt auch der Vorschlag gemacht, die verschiedenen effektiven Wechselwirkungen nach den Eigenfunktionen der entsprechenden Normterme zu entwickeln. Für effektive Zwei-Cluster-Wechselwirkungen, die ja in Drei-Cluster-Systemen enthalten sind, wurde dies bereits mit sehr gutem Erfolg durchgeführt /4,9/. Allerdings darf man wegen des Anteils einer lokalen Direktwechselwirkung, die die Wechselwirkung nichtkompakt macht, die Potentialkonstanten nicht durch Projektion auf die Formfaktoren berechnen /13/. Genaueres ist den angeführten Arbeiten /4,9/ zu entnehmen.

Für die Terme $\tilde{V}_{\alpha n,p}$ und $\tilde{V}_{\alpha p,n}$ gemäß (III,46) und (IV,6) wird man ebenfalls für die R_1-Abhängigkeit die Eigenfunktionen $u_{\alpha n,i}$ und $u_{\alpha p,i}$ der Subsystem-Normkerne $N_{\alpha n}$ bzw. $N_{\alpha p}$ nehmen. Da sie in diesen Koordinaten $R_{1,p}$ bzw. $R_{1,n}$ nichtlokal sind, erhält man durch Projektion auf diese Formfaktoren, das heißt durch zweifache Überintegration, z. B. ein Matrixelement

$$\langle u_{\alpha n,i} | \tilde{V}_{\alpha n,p} | u_{\alpha n,j} \rangle = \bar{V}_{ij}(R'_{2,p}) \quad . \qquad (V,1)$$

Dieses ist lokal in $R'_{2,p}$, so wie dies auch für $\tilde{V}_{\alpha n,p}$ der Fall ist. Es ist aber nur von einer Variablen abhängig und kann nun mit einem der bekannten und erprobten Verfahren für lokale Potentiale in dieser Variablen separabel angenähert werden /14/.

Die Formfaktoren sind dann Produkte von Funktionen in den einzelnen Koordinaten, also z. B.

$$f_{\alpha n,ik}(R_{1,p},R_{2,p}) = u_{\alpha n,i}(R_{1,p}) \cdot v_k(R_{2,p}) \qquad (V,2)$$

wenn v_k als Formfaktor für die Näherung des lokalen Potentials $\bar{V}_{ij}$ verwendet wurde.

Des weiteren sollen im folgenden bei einer Partialwellenzerlegung des Formfaktors

$$f_{\alpha n,ik}(\vec{R}_{1,p},\vec{R}_{2,p}) = \sum_{\substack{\ell_1,m_1 \\ \ell_2,m_2}} u_{\alpha n,i\ell_1m_1}(R_{1,p})\cdot v_{k\ell_2m_2}(R_{2,p})\cdot Y_{\ell_1m_1}\cdot Y_{\ell_2m_2} \qquad (V,3)$$

mit den Kugelfunktionen $Y_{\ell m}$ nur die Drehimpulse $\ell_1,\ell_2 = 0$ interessieren. Dies sind gerade die Eigenfunktionen ohne Winkelanteile, also nur abhängig von $\vec{R}^2_{1,p}$ und $\vec{R}^2_{2,p}$. Es kann also auch weiterhin auf die Kennzeichnung von Vektoren verzichtet werden.

Die Eigenfunktionen für $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha p}$ sind dieselben, da ja $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha p}$ dieselben Funktionen von $R_{1,p}$, $R_{2,p}$ bzw. $R_{1,n}$, $R_{2,n}$ sind. Man erhält für $i = 0,1,2,\ldots$ und $\ell_1 = 0$

$$u_{\alpha n,i}(R_{1,p}) = c_i L_i^{1/2}(4/5\cdot aR^2_{1,p})\cdot\exp\{-2/5\cdot aR^2_{1,p}\} \quad . \qquad (V,4)$$

Dabei ist c_i ein Normierungsfaktor, $L_i^{1/2}$ ist ein verallgemeinertes Laguerre-Polynom der Ordnung i mit der Definition

$$L_i^s(x) = x^{-s}\cdot e^x\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^i(x^{s+i}\cdot e^{-x}) \quad . \qquad (V,5)$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_i = \left(\frac{1}{16}\right)^i \qquad (i = 0,1,2,\ldots) \quad . \qquad (V,6)$$

Die Eigenfunktionen des (kompakten) Drei-Cluster-Normterms N_2 entsprechend (IV,11) mit $\ell_2 = 0$ sind

$$u_{2,i}(R_{1,\alpha},R_{2,\alpha}) = c_i L_i^{1/2}(4/3\cdot aR_{2,\alpha}^2) \cdot\exp(-1/4\cdot aR_{1,\alpha}^2 - 2/3\cdot aR_{2,\alpha}^2) \qquad (V,7)$$

mit Eigenwerten $\lambda_i = (1/4)^i$.
Transformiert man

$$u_{2,0} = c_0 \exp(-1/4\cdot aR_{1,\alpha}^2 - 2/3\cdot aR_{2,\alpha}^2) \qquad (V,8a)$$

auf Koordinaten im p-System, so erhält man

$$u_{2,0} = c_0 \exp(-2/5\cdot aR_{1,p}^2 - 5/3\cdot aR_{2,p}^2). \qquad (V,8b)$$

Diese ist bis auf einen von $R_{2,p}$ abhängigen Faktor proportional zu $u_{\alpha n,0}$, wegen der δ-Funktion in $N_{\alpha n}$ also ebenfalls Eigenfunktion zu $N_{\alpha n}$ mit Eigenwert 1. Das Entsprechende gilt im n-System mit $N_{\alpha p}$ und $u_{\alpha p,0}$. Im Schalenmodell entspricht dies Funktionen mit mehr als vier Nukleonen in der 1s-Schale.

Wie man aus Gleichung (V,7) sieht, bilden die Eigenfunktionen nur in der Koordinate $R_{2,\alpha}$ ein vollständiges System. In der Koordinate $R_{1,\alpha}$ genügt für die Eigenfunktion der Exponentialteil, da N_2 in dieser Koordinate bereits separiert . Um ein vollständiges System auch in $R_{1,\alpha}$ für die Entwicklung des gesamten Terms $\tilde{K}_2$ gemäß (IV,10) zu erhalten, nimmt man wohl am günstigsten Laguerre-Polynome

$$L_k^{1/2}(1/2\cdot aR_{1,\alpha}^2) \qquad (V,9)$$

hinzu.

Der Formfaktor ist dann

$$v_{ik}(R_{1,\alpha},R_{2,\alpha}) = c_{ik}L_k^{1/2}(1/2\cdot aR_{1,\alpha}^2)\cdot\exp(-1/4\cdot aR_{1,\alpha}^2)$$
$$L_i^{1/2}(4/3\cdot aR_{2,\alpha}^2)\cdot\exp(-2/3\cdot aR_{2,\alpha}^2). \qquad (V,10)$$

Diese Wahl hat den Vorteil, daß N_2 nur für $k = 0$ von 0 verschiedene Matrixelemente ergibt.

Auf die Angabe von Formfaktoren für die Entwicklung von $\tilde{K}_3$ gemäß (IV,22) wurde verzichtet, da sich die Nichtkompaktheit von $\tilde{K}_3$ nicht wie bei $\tilde{V}_{\alpha n,p}$ bzw. $\tilde{V}_{\alpha p,n}$ auf ein Produkt von separablem mal lokalem Teil zurückführen läßt. Die δ-Funktion in $\tilde{K}_3$ enthält nämlich anders als etwa bei $\tilde{V}_{\alpha n,p}$ in jedem der drei Jakobi-Koordinatensysteme alle vier Koordinaten R_1', R_1'', R_2', R_2''. Der Term $\tilde{K}_3$ läßt sich daher nicht einmal in zwei Koordinaten separabel über Matrixelemente entwickeln.

Daß $\tilde{K}_3$ auftritt, ist allein den Austauschtermen der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zuzuschreiben. Nimmt man zwischen (durch Spin und Ladung unterschiedenen) Nukleonen verschiedene Kräfte an, die dann keine Austauschoperatoren mehr enthalten müssen, so treten Terme der Art $\tilde{K}_3$ nicht auf. Wie schon früher gezeigt, müssen die Matrixelemente auch der Austauschoperatoren verschwinden, und dazu werden gerade auch die Terme von $\tilde{K}_3$ benötigt. Wenn man also wenigstens die Wirkung auf die redundanten Relativfunktionen berücksichtigen will, muß man das Matrixelement mit der Relativfunktion $u_{2,0}$ berechnen. Für die weitere Entwicklung müßten noch geeignete Approximationsverfahren entwickelt werden.

V.3. Matrixelemente

Als erstes wird das Ergebnis der teilweisen Entwicklung von $\tilde{V}_{\alpha n,p}(R'_{1,p},R''_{1,p},R'_{2,p})$ nach Formfaktoren

$$u_{\alpha n,i}(R'_{1,p})\cdot u_{\alpha n,j}(R''_{1,p}) \qquad (V,11)$$

aufgeführt. Für die entstehenden Funktionen $\bar{V}_{ij}(R'_{2,p})$ wurden für die Parameter a und β Zahlen eingesetzt, um das Ergebnis nicht zu umständlich werden zu lassen. Hierzu wurde

$$a = 0{,}543\ \text{fm}^{-2} \quad \text{und} \quad \beta = 0{,}46\ \text{fm}^{-2} \qquad (V,12)$$

verwendet /4,6/. Die Austauschparameter w, m, b und h wurden nicht festgelegt, da über sie gelegentlich noch gerne die Mischung der Austauschkräfte geändert wird.

Man erhält

$$\bar{V}_{ij} = p_{ij}\cdot\exp\left(\frac{5a\beta}{5a+4\beta}\cdot R'^{2}_{2,p}\right)\cdot V_o \qquad (V,13)$$

mit

$$p_{00} = 2{,}3\ w - 0{,}46\ m + 1{,}38\ b - 0{,}92\ h$$

$$p_{10} = 2{,}85\ w - 0{,}14\ m + 2{,}56\ b - 0{,}28\ h - (0{,}520\ w + 0{,}026\ m - 0{,}468\ b + 0{,}052h)\cdot R'^{2}_{2,p}$$

$$p_{01} = p_{10} \qquad (V,14)$$

$$p_{11} = 0{,}140\ w - 0{,}035\ m + 0{,}070\ b - 0{,}071\ h - (4{,}07\ w - 1{,}33\ m + 1{,}41\ b - 2{,}66\ h)\cdot 10^{-3}\cdot R'^{2}_{2,p} + (5{,}15\ w - 0{,}15\ m + 4{,}85\ b - 0{,}29\ h)\cdot 10^{-4}\cdot R'^{4}_{2,p}$$

Die Entwicklung wurde nur bis zu Rang 2 ausgeführt, da eine Entwicklung in $R_{2,p}$ bis zum selben Rang bereits für die gesamte Wechselwirkung Rang 4 bedeutet.

Bevor Entwicklungskoeffizienten für eine Approximation durch Formfaktoren nach (V,10) angegeben werden, sollen der Anschaulichkeit halber Schnittfunktionen dieser Formfaktoren, bei denen die Koordinate $R_{2,\alpha}$ festgehalten wird, gezeigt werden. Sie sind Oszillatorfunktionen in $R_{1,\alpha}$. In Richtung von $R_{2,\alpha}$ erhielte man natürlich das entsprechende.

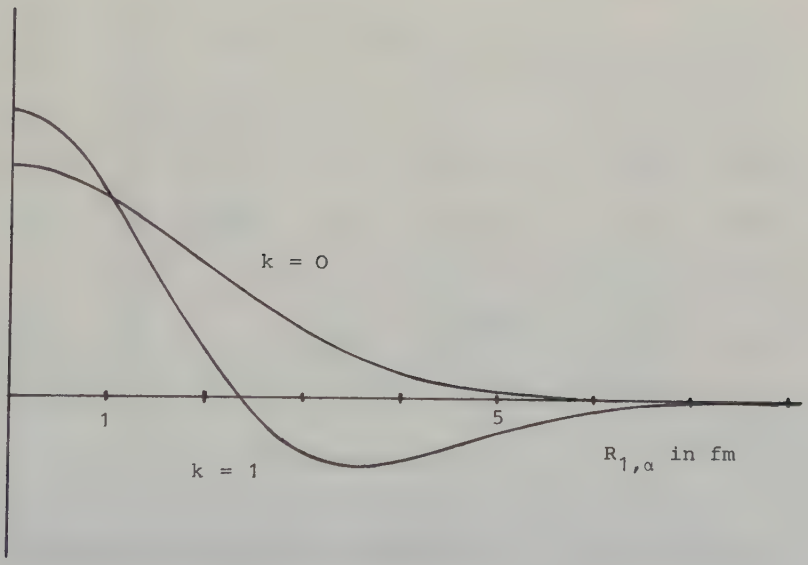


Abbildung 1 Formfaktor v_{ik} gemäß Gleichung (V,10) für k = 0,1 in der Variablen $R_{1,\alpha}$

Nun zu den Matrixelementen des kompakten Operators $\tilde{K}_2(R'_{1,\alpha}, R''_{1,\alpha}, R'_{2,\alpha}, R''_{2,\alpha})$: Der besseren Übersicht halber sind die Entwicklungen der Operatoren K_2, K_2^t und N_2 in $\tilde{K}_2$ getrennt aufgeführt. Die Indizes der Matrizen beziehen sich auf Formfaktoren $v_{ik}(R'_{1,\alpha}, R'_{2,\alpha}) \cdot v_{jm}(R''_{1,\alpha}, R''_{2,\alpha})$. Wegen $v_{iO} = u_{2,i}$ erhält man für den Normterm N_2 die folgende besonders einfache Matrix.

Tabelle 2 Matrix des Normterms N_2, Gleichung (IV,11) bis (IV,13), in der Basis der Formfaktoren laut Gleichung (V,10)

ik \ jm	00	01	10	11
00	1			
01	0	0		
10	0	0	1/4	
11	0	0	0	0

Wegen der Symmetrie genügt eine Dreiecksmatrix zur Beschreibung.

Für den Term K_2^t erhält man die Werte von Tabelle 3.

Tabelle 3 Matrix des Terms K_2^t, Gleichung (IV,14) bis (IV,15) in der Basis (V,10) (ohne $h^2/8m\pi^2$)

ik \ jm	00	01	10	11
00	$-\frac{15a}{2}$			
01	$-\frac{3a}{2}\sqrt{2/3}$	0		
10	$-\frac{3a}{2}\sqrt{2/3}$	0	$-\frac{19a}{8}$	
11	0	0	$-\frac{15a}{4}\sqrt{2/3}$	0

Für die Matrixelemente des Potentialterms K_2 wurde zur Vereinfachung der Ausdrücke wieder

$$a = 0{,}543\ \text{fm}^{-2} \quad \text{und} \quad \beta = 0{,}46\ \text{fm}^{-2} \qquad (V,15)$$

gesetzt.

Tabelle 4 Matrix des Potentialterms K_2, Gleichung (IV,16) bis (IV,21), in der Basis (V,10) (ohne V_o)

	00	01	10	11
00	3,39 w + 1,13 m + 1,13 b - 0,678 h			
01	0,522 w + 0,087 m + 0,348 b	0,056 w - 0,084 m + 0,084 b - 0,028 h		
10	0,522 w - 0,131 m + 0,261 b - 0,261 h	0,084 w - 0,126 m + 0,126 b - 0,042 h	0,760 w + 0,414 m + 0,151 b - 0,126 h	
11	0,168 w - 0,042 m + 0,084 b - 0,084 h	0,038 w - 0,057 m + 0,057 b - 0,019 h	0,119 w + 0,034 m + 0,069 b + 0,006 h	0,016 w - 0,024 m + 0,024 b - 0,008 h

An diesem Beispiel sieht man, daß die Wahl von Eigenfunktionen des Normterms als Teil der Basis für die Entwicklung der anderen Terme sinnvoll war. Die Matrixelemente 1010 sind beidesmal ungefähr 1/4 der Werte der Elemente 0000. Dies bedeutet, daß die Direktterme jedesmal um etwa denselben Faktor wie beim Normterm durch die zugehörigen Austauschterme vermindert werden.

Das Matrixelement von $\tilde{K}_3$ entsprechend Gleichung (IV,22) bis (IV,27) mit $u_{2,0}$ laut Gleichung (V,8) schließlich ist

$$(-2m - 2h) \cdot \left(\frac{a}{a+2\beta}\right)^{3/2} . \qquad (V,16)$$

Die hier angedeutete Vereinfachung der effektiven Wechselwirkungen ist natürlich nicht die einzige Möglichkeit, es soll auch nur gezeigt werden, daß es praktisch durchführbare Möglichkeiten gibt und wo Schwierigkeiten auftreten können.

VI. Zusammenfassung und Diskussion

Im Rahmen eines RG-Formalismus für A Nukleonen mit maximal N Clustern erhält man effektive N-Körper-Gleichungen mit Wechselwirkungen bis zu einem N-Körper-Potential. Wenn man ein System bis zu einer bestimmten Energie schon gut durch einen Ansatz

$$\psi = \phi_a \cdot \phi_b \cdot \phi_c \cdot \chi(R_1, R_2) \qquad \text{(VI,1)}$$

mit drei Clusterbindungsfunktionen ϕ und einer Relativwellenfunktion χ beschreiben kann, so erhält man eine Drei-Körper-Gleichung für χ mit effektiven Zwei- und Drei-Körper-Potentialen.

Man kann diese Gleichung formal schreiben als

$$\int \langle R' \phi_a \phi_b \phi_c | (H - E) \cdot \hat{A} | R'' \phi_a \phi_b \phi_c \rangle \langle R'' | \chi \rangle \, dR'' = 0 \qquad \text{(IV,2)}$$

wobei R' z. B. für Parameterkoordinaten R_1' und R_2' steht. Der Ausdruck in der ersten spitzen Klammer enthält über den Antisymmetrisierer $\hat{A}$ auch den Einfluß des Pauli-Prinzips. Nach Integration und Summation über alle Freiheitsgrade wird er ein teils lokaler, teils nichtlokaler Operator in den Koordinaten R' und R''. Dieser enthält das Pauli-Prinzip in der Art, daß er z. B. auf pauliverbotene Relativwellenfunktionen χ mit $\hat{A} \{\phi_a \phi_b \phi_c \chi\} = 0$ angewendet unabhängig von der Energie stets 0 ergibt (redundante Lösungen).

Die entstehende Gleichung kann man schreiben als

$$(T_1 + T_2 + V_{ab}^{eff} + V_{bc}^{eff} + V_{ac}^{eff} + V_{abc}^{eff} - E_{rel}) | \chi \rangle = | 0 \rangle,$$

wobei T_1 und T_2 die Operatoren der kinetischen Energie der Relativbewegung sind, V_{ab}^{eff} z. B. ist die effektive Zwei-Cluster-Wechselwirkung, wie sie aus einer Zwei-Cluster-Rechnung im Subsystem A+B folgen würde, und V_{abc}^{eff} ist ein

allein durch das Pauli-Prinzip bedingtes Drei-Körper-Potential.

Zu V_{abc}^{eff} tragen Terme bei, die durch Wechselwirkung eines Clusters mit einem Zwei-Cluster-Subsystem entstehen, wenn dieses antisymmetrisiert wird. Sie sorgen unter anderem dafür, daß die Wechselwirkung mit diesem Subsystem für darin pauliverbotene Relativfunktionen verschwindet. Diese Terme sind nichtlokal in der Subsystemkoordinate und lokal in der Koordinate zum dritten Cluster und treten auch dann auf, wenn alle Bestandteile des dritten Clusters unterscheidbar von denen des Subsystems sind.

Weiter enthält V_{abc}^{eff} Terme, die durch Permutationen zwischen allen drei Clustern als Teil der Antisymmetrisierung entstanden sind. Bis auf den Sonderfall, daß zwei oder drei Cluster identisch sind, ergeben sie einen nichtlokalen, kompakten Beitrag zum effektiven Drei-Körper-Potential.

Außerdem können in speziellen Systemen noch Terme auftreten, die allein durch den Austauschcharakter der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung hervorgerufen werden und sich in diesem System im Typ von den beiden vorigen Beiträgen unterscheiden. Dies tritt dann ein, wenn zwei Cluster schon fast gleich sind und durch ein Austauschpotential zum dritten Cluster identisch gemacht werden. Dadurch entstehen Beiträge wie im Sonderfall identischer Cluster.

Alle diese Terme wurden, um ein Beispiel zu haben, für das System α+n+p explizit angegeben. Dabei wurde eine gaußförmige α-Bindungsfunktion und ein ebenfalls gaußförmiges zentrales Nukleon-Nukleon-Potential angenommen. Selbstverständlich können mit den hier angewendeten Methoden auch die effektiven Wechselwirkungen in anderen Systemen und für andere Cluster Ansätze erhalten werden. Es wird sich dabei oft als günstiger erweisen, die Generator-Koordinaten-Technik /6,12/ anzuwenden. Sie ist ins-

besondere für Systeme mit mehr Teilchen besser geeignet, die Zwischenschritte sind aber, gerade weil sie ein etwas verfeinertes Verfahren darstellt, schwieriger zu übersehen als in dem hier durchgeführten RG-Verfahren im engeren Sinn. Beide Methoden führen aber auf dieselbe effektive Wechselwirkung. Darüber hinaus werden die Verfahren zur Berechnung der effektiven Wechselwirkungen ständig weiter verbessert /15/.

Um die hier betrachtete Drei-Cluster-RG-Gleichung als effektive Drei-Körper-Gleichung zu lösen, kann man eine Faddeev-Rechnung durchführen, muß aber dann die komplizierten effektiven Wechselwirkungen zwischen den Clustern im allgemeinen separabel annähern, wenn man mit vertretbarem Aufwand auskommen will. Für die Zwei-Cluster-Wechselwirkung wurde diese Approximation bereits mit gutem Erfolg durchgeführt /4,9/, für die Drei-Cluster-Anteile wurden hier Vorschläge gemacht und auch auf ein Beispiel angewendet. Schwierigkeiten kann es dabei in bestimmten Systemen aufgrund von Potentialen mit Austauschcharakter geben. Am einfachsten werden diese Schwierigkeiten natürlich dadurch umgangen, daß man auf Nukleon-Nukleon-Potentiale im Isospin-Formalismus verzichtet.

Oberstes Gebot bei der Beurteilung einer Rechnung mit Drei-Körper-Potentialen, die durch das Pauli-Prinzip hervorgerufen werden, sollte jedoch stets sein, sicherzustellen, daß die Auswirkung dieser Potentiale qualitativ unabhängig von technischen Details wie Bindungsfunktionen, Nukleon-Nukleon-Potentialen und Approximationsmethoden ist, solange diesen einigermaßen vernünftige Überlegungen zugrunde liegen.

Anhang

Behauptung:

Die Koordinaten R_1, R_2, $\tilde{R}_1=P_{abc}\cdot R_1$ und $\tilde{R}_2=P_{abc}\cdot R_2$ sind linear abhängig, wenn die Permutation P_{abc} alle Teilchen eines Clusters durch alle eines zweiten mit gleicher Teilchenzahl ersetzt.

Beweis:

O. B. d. A. werde Cluster A durch B ersetzt, die Relativkoordinaten werden im c-System geschrieben. Es seien s_a, s_b und s_c die Schwerpunktskoordinaten der Cluster A, B und C. Dann gilt nach Voraussetzung

$$P_{abc}\cdot s_a = s_b$$

Es sei weiter $P_{abc}\cdot s_b = \tilde{s}_b$, $P_{abc}\cdot s_c = \tilde{s}_c$, $s_{ab} = 1/2\cdot(s_a+s_b)$ und $\tilde{s}_{ab} = P_{abc}\cdot s_{ab} = 1/2\cdot(s_b+\tilde{s}_b)$.
Dann gilt

$$R_{1,c} = s_b - s_a$$

$$R_{2,c} = s_c - s_{ab}$$

$$\tilde{R}_{1,c} = \tilde{s}_b - s_b$$

$$\tilde{R}_{2,c} = \tilde{s}_c - \tilde{s}_{ab} \quad .$$

Weil gilt

$$s_{ab} = s - \mu R_{2,c}$$

$$\tilde{s}_{ab} = s - \mu \tilde{R}_{2,c}$$

mit s: Schwerpunkt aller Cluster und $\mu = n_c/(2n+n_c)$, wobei n und n_c die Zahl der Teilchen in A (bzw. B) und C ist, folgt weiter

$$\tilde{s}_{ab} - s_{ab} = \mu(R_{2,c} - \tilde{R}_{2,c}) \quad .$$

Andererseits ist

$$\tilde{s}_{ab} - s_{ab} = 1/2\cdot(s_b+\tilde{s}_b - (s_a+s_b)) = 1/2\cdot(\tilde{s}_b - s_a)$$

und

$$R_{1,c} + \tilde{R}_{1,c} = s_b-s_a + \tilde{s}_b-s_b = \tilde{s}_b - s_a \quad .$$

Dies alles ergibt

$$1/2\cdot(R_{1,c} + \tilde{R}_{1,c}) = \mu\cdot(R_{2,c} - \tilde{R}_{2,c}) \quad ,$$

und dies ist die behauptete lineare Abhängigkeit.

Literatur

/1/ E. W. Schmid, H. Ziegelmann, The Quantum Mechanical Three-Body-Problem, Vieweg, Braunschweig (1974).

/2/ B. Charnomordic, C. Fayard, G. H. Lamot, Phys. Rev. C15 (1977) 864.

P. Doleschall, private Mitteilung.

Y. Koike, Prog. Theor. Phys. 59 (1978) 864; und in Few Body Systems and Nuclear Forces I, Proceedings, Graz 1978, Springer, Berlin (1978) 320.

/3/ E. W. Schmid, preprint (1977).

/4/ E. W. Schmid, Vortrag beim Workshop on Few Body Problems in Nuclear Physics, Triest (1978).

/5/ E. W. Schmid, preprint (1978).

/6/ K. Wildermuth, Y. C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus, Vieweg, Braunschweig (1977).

/7/ S. Saito, Prog. Theor. Phys. 41 (1969) 705; und Suppl. Prog. Theor. Phys. 62 (1977) 11.

/8/ E. J. Kanellopoulos, Dissertation, Universität Tübingen (1967).

/9/ E. W. Schmid, R. Kircher, preprint (1978).

/10/ E. W. Schmid, H. Ziegelmann, in Few Body Dynamics, Proceedings, Delhi 1975, North Holland, Amsterdam (1976) 418.

/11/ H. Seichter, E. W. Schmid, preprint (1977).

/12/ H. Horiuchi, Suppl. Prog. Theor. Phys. 62 (1977) 90.

/13/ T. A. Osborn, J. Math. Phys. 14 (1973) 373.

/14/ A. Fournier, Dissertation, Rijksuniversiteit te Groningen (1976).

/15/ A. Tohsaki-Suzuki, Suppl. Prog. Theor. Phys. 62 (1977) 191.

K. T. Hecht, W. Zahn, preprint (1978).

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche klärende Gespräche danke ich Herrn Prof. Dr. E. W. Schmid. Weiterhin gilt mein Dank vielen gegenwärtigen und früheren Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik, insbesondere Dr. F. Sohre, Dr. J. Schwager, Dr. W. Plessas, Prof. Dr. S. Oryu, Dr. L'Huillier, Herrn Orlowski und Herrn Kircher für ihr Interesse und ihre Unterstützung.

Die numerischen und viele algebraische Rechnungen wurden auf der Rechenanlage TR 440 des Zentrums für Datenverarbeitung Tübingen durchgeführt. Einige verwendete Unterprogramme entstammen der Harwell Subroutine Library und der CERN-Bibliothek. Insbesondere aber wurde die Formelbearbeitungssprache REDUCE von A. C. Hearn häufig verwendet.

Lebenslauf

Am 19. Juni 1950 wurde ich als Sohn der Hilda Hoffmann, geb. Seichter, in Gilching, Kreis Starnberg, geboren. Ab 1955 wohnten wir in Geislingen an der Steige, wo ich auch zur Schule ging. Von 1961 an besuchte ich das Gymnasium Geislingen und machte dort im Juni 1969 das Abitur.

Nach zwei Jahren Wehrdienst begann ich 1971 in Ulm das Studium der Physik. Nach dem Vordiplom im Jahre 1973 wechselte ich an die Universität Tübingen. Dort legte ich die Diplom-Hauptprüfung im September 1976 ab. Die Diplomarbeit fertigte ich bei Herrn Prof. Dr. E. W. Schmid zum Thema "Untersuchungen über Näherungsansätze im N-Teilchen-Problem" an.

Das Thema der vorliegenden Dissertation erhielt ich im Oktober 1976 ebenfalls von Herrn Prof. Dr. E. W. Schmid, unter dessen Anleitung ich die Arbeit bis November 1978 fertigstellte. In diesem Zeitraum war ich nacheinander Wissenschaftliche Hilfskraft und Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Physik in Tübingen.

Mathematik- und Physikvorlesungen habe ich bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten gehört:

Brune, Constantinescu, Fiedler, Güttinger, Kilian, Körner, Kramer, Krüger, Mack, Möllenstedt, Mühleisen, Nonnenmacher, Peyerimhoff, Risken, Runckel, Sawodny, Schmid, Stumpf, Wildermuth, Wittern, Wolf, Zeil, Ziegelmann.